Frederico Westphalen, 6ª feira 13/05/2022.

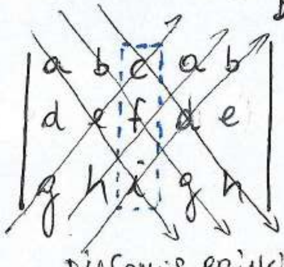
Revisão para a 1ª prova.

Unidade 1 - Funções

[X] 1.1- Função do 1º grau →

Para obter a eq. geral de uma reta S

Se $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, Det A =



Diagonais secundárias (-)

Diagonais principais (+)

$$\text{Det}\,A = (aei) + (bfg) + (cdh) - [(gec) - (hfa) - (idb)]$$

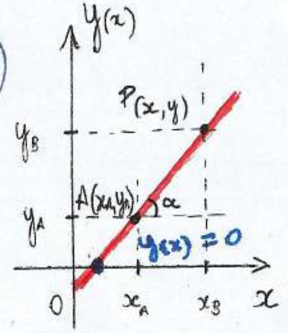
(coef. angular)
coeficiente da variável x

Constante (coef. linear da reta.)

$$y_{(x)} = ax + b$$

Variável dependente de x

Variável independente



Se $a > 0$, crescente;
Se $a < 0$, decrescente.

Equação fundamental da reta.

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

Sendo o coeficiente angular: $m = tg(\alpha)$.

$$m = \frac{CO}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

$$\Longrightarrow \alpha = \text{arcotg}(m)$$

[X] 1.2 - Função quadrática →

Completar quadrados é uma técnica para converter um polinômio quadrático:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

para a forma:

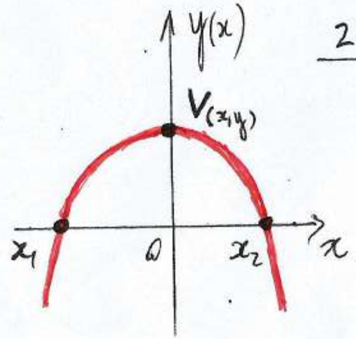
$$\boxed{a(x - x_v) + y_v = 0}$$

$$y_{(x)} = ax^2 + bx + c$$

1º Raízes da função

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(São os dois pontos das extremidades da parábola que cortam o eixo x)



Se $a < 0$, pto. de máx.

Se $a > 0$, pto. de mín.

Exemplo: $y(x) = x^2 + 4x + 1$

2º O ponto do vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac}{4a}$$

16/05/2022
2ª feira.

[x] 1.3 - FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Seja $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores } a}$

com $n \geq 2$, dizemos:

Potência de base **a** e expoente **n**.

A função exponencial é ∀ fç. real da forma $f(x) = a^x$.

com $a > 0$ e $a \neq 1$.

PROPRIEDADES:

- Todo número com expoente $n = 0$ é 1, $a^0 = 1$.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

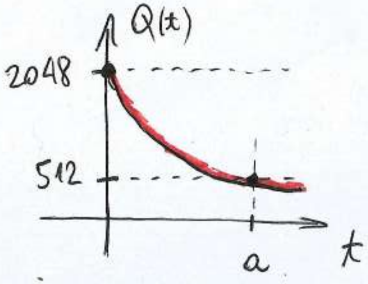
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; pois $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e $a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (p/ $b \neq 0$).

Aplicações: crescimento exponencial.

$$\boxed{f(x) = C \cdot a^{Kx}}$$

Exemplo:



$Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$, $\begin{cases} K = ? \\ a = ? \end{cases}$

$Q_{(t=0)} = K = 2048g$

$Q(t=a) = 512 = 2048 \cdot 2^{-\frac{1}{2}t}$

$2^{t/2} = \frac{2048}{512} = 4 = 2^2$

$a = t = 4$ min.

16/05/2022

[x] 1.4 - FUNÇÃO LOGARÍTMICA.

expoente

$$a^{x} = N \Longleftrightarrow x = \log_a(N)$$

base Nº

LOGARÍTIMO DECIMAIS (BRIGGS), a = 10.

$$10^{x} = N \Longleftrightarrow x = \log(N)$$

LOGARÍTMO NATURAL (EULER), a = e

$$e^{x} = N \Longleftrightarrow x = \ln(N)$$

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO :

$$\log_a(1) = 0 \; ; \qquad \log_a(a^{m}) = m$$

$$a^{\log_a(N)} = N \; ; \qquad \log_a(N) = \log_a(M) \Longleftrightarrow N = M.$$

PROPRIEDADES:

$$\log_a(M) = x \Longrightarrow M = a^{x} \qquad (1)$$

$$\log_a(N) = y \Longrightarrow N = a^{y} \qquad (2)$$

$$\log_a(N \cdot M) = z \Longrightarrow M \cdot N = a^{z} \qquad (3)$$

PORTANTO: $a^{z} = a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}$.

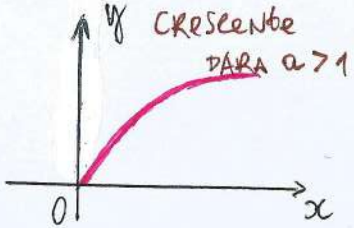
PRODUTO: $\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$

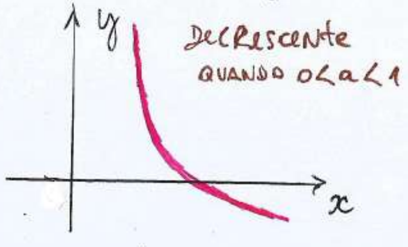
QUOCIENTE: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$

POTÊNCIA: $\log_a(N^{m}) = m \log_a(N)$

MUDANÇA DE BASE: $\log_a(N) = \dfrac{\log_b(N)}{\log_b(a)} \quad \begin{cases} N > 0 \\ 0 < a \neq 1 \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOG.





EQUAÇÃO QUADRÁTICA (Eq. DO 2º GRAU)

FW 26/04/2

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \quad (\div a)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$ (COMPLETAR QUADRADOS)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

FÓRMULA DE BHÁSKARA

18/05/2020

PÁG. 62

13) Construa o gráfico das seguintes funções, dando o domínio, a imagem e o período.

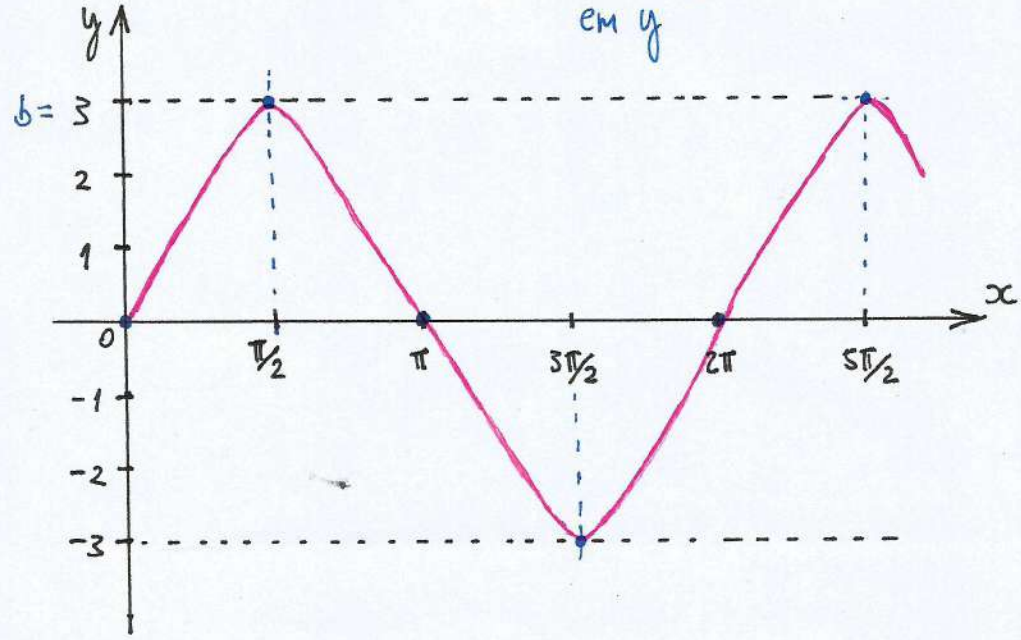
vou reescrever como uma função geral:

a) $y = 3 sen(x)$ $\longrightarrow$ $y = a + b\, sen(cx + d)$

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Translação} \\ \text{em } y}}{a} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplitude}}}{b}\, sen(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Período}}}{c}x + d)$$

$\leftarrow$ Translação em x.

$(CP = 2\pi) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{c}$



$y(x) = 3 \sin(x)$
$y(0) = 0$
$y(\pi/2) = 3$
$y(\pi) = 0$
$y(3\pi/2) = -3$
$y(2\pi) = 0$
⋮

} para construir o gráfico

Resposta
- Domínio = ℝ (números reais, todos)
- Imagem = $[-3, 3]$ → intervalo da amplitude!
- Período = $2\pi \longrightarrow sen\, x = sen(2\pi + x)$

Observe: que neste caso não temos translação em y nem em x, ou seja os termos a e d da função geral são nulos! $\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ e } d = 0 \\ b = \pm 3 \text{ e } c = 1 \end{cases}$

Outra observação:

A função seno é ímpar $\Rightarrow \sin(x) = -\sin(-x)$

13 b) $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ e } d = 0 \\ b = 2 \text{ e } c = \frac{1}{4} \end{cases}$

$y_{(0)} = 0$

$y(\pi/2) = 2\,\text{sen}\left(\overset{22,5^\circ}{\frac{\pi}{8}}\right) = 2 \times 0,38 = 0,765$

$y(\pi) = 2\,\text{sen}\left(\overset{45^\circ}{\frac{\pi}{4}}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \simeq 1,4142$

$y(3\pi/2) = 2\,\text{sin}\left(\overset{67,5^\circ}{\frac{3\pi}{8}}\right) \simeq 2 \times 0,92 = 1,847$

$y(2\pi) = 2\,\text{sen}\left(\overset{90^\circ}{\pi/2}\right) = 2$; $y(3\pi) = 1,41$; $y(4\pi) = 0$ $y(5\pi) = -1,41$;

$y(6\pi) = -2$. $y(7\pi) = -1,41$ $y(8\pi) = 0$.

PERÍODO: $cP = 2\pi$

$\frac{P}{4} = 2\pi$

$\boxed{P = 8\pi} \simeq 25,133$

π — 180°

$\pi/8$ — GRAU

GRAU $= 22,5^\circ$

π — 180°

$\frac{3\pi}{8}$ — GRAU

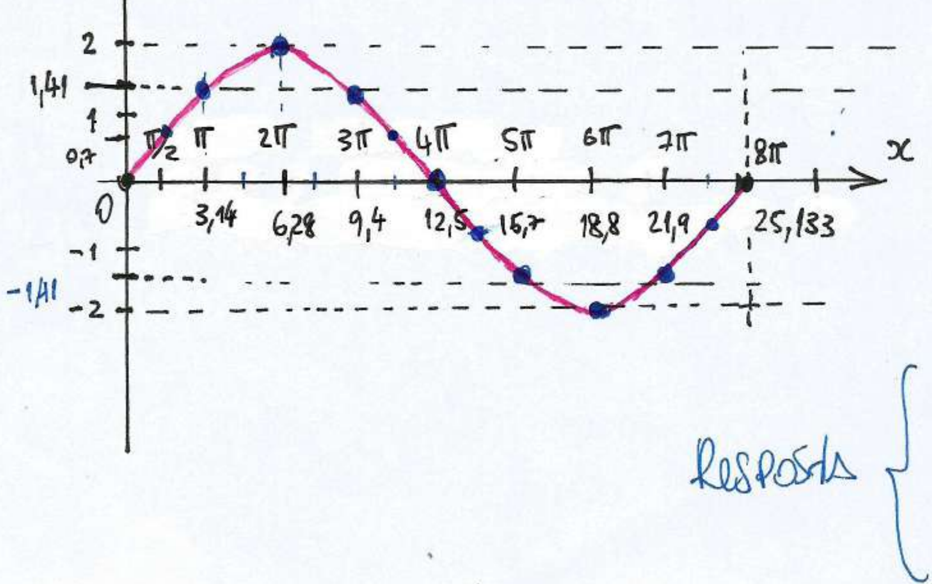
$\cancel{\pi}$ GRAU $= \frac{3\cancel{\pi}}{8} \cdot 180$

GRAU $= 67,5^\circ$

$\frac{\pi}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Nesse item, se preferir use o valor $\longrightarrow \pi = 3,14$.

Aí, o gráfico da função, vai de zero a 25,133 para o 1º período (depois repete).

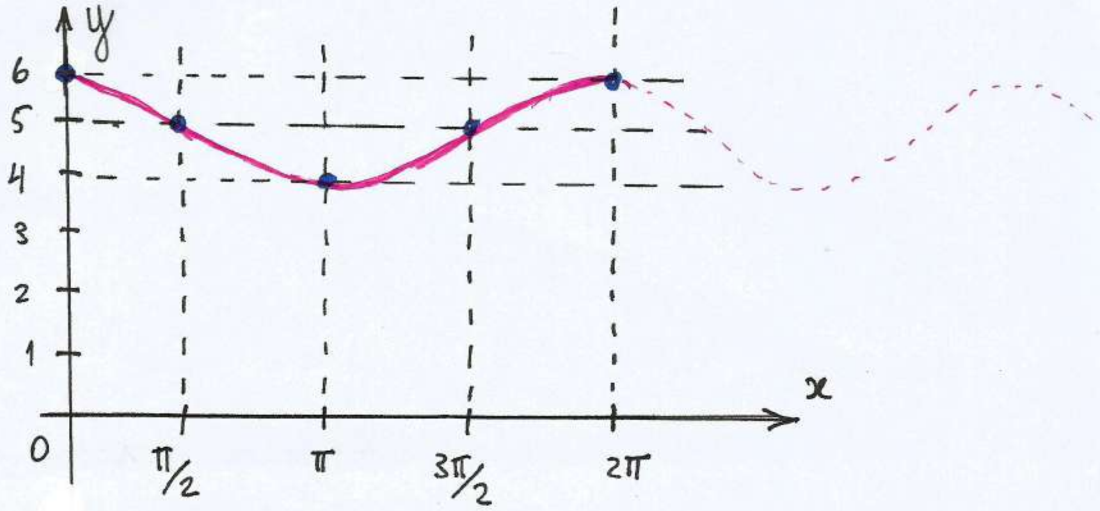


Resposta $\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ Im = [-2, 2] \\ P = 8\pi \end{cases}$

d) $y_{(x)} = 5 + \cos(x) \longrightarrow \begin{cases} a = 5 \text{ e } d = 0 \\ b = 1 \text{ e } c = 1 \end{cases}$

Portanto, já podemos dizer que:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ I = [-1, 1] \longrightarrow \text{para a função cos, sem a translação de } \pm 5. \\ P = 2\pi \end{cases}$$



$y_{(0)} = 5 + \overset{1}{\cancel{\cos}}(0) = 6$

$y(\pi/2) = 5 + \overset{0}{\cancel{\cos}}(\pi/2) = 5$

$y(\pi) = 5 + \overset{-1}{\cancel{\cos}}(\pi) = 4$

$y(3\pi/2) = 5 + \overset{0}{\cancel{\cos}}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5$

$y(2\pi) = 5 + \overset{1}{\cancel{\cos}}(2\pi) = 6$

⋮

Então temos que

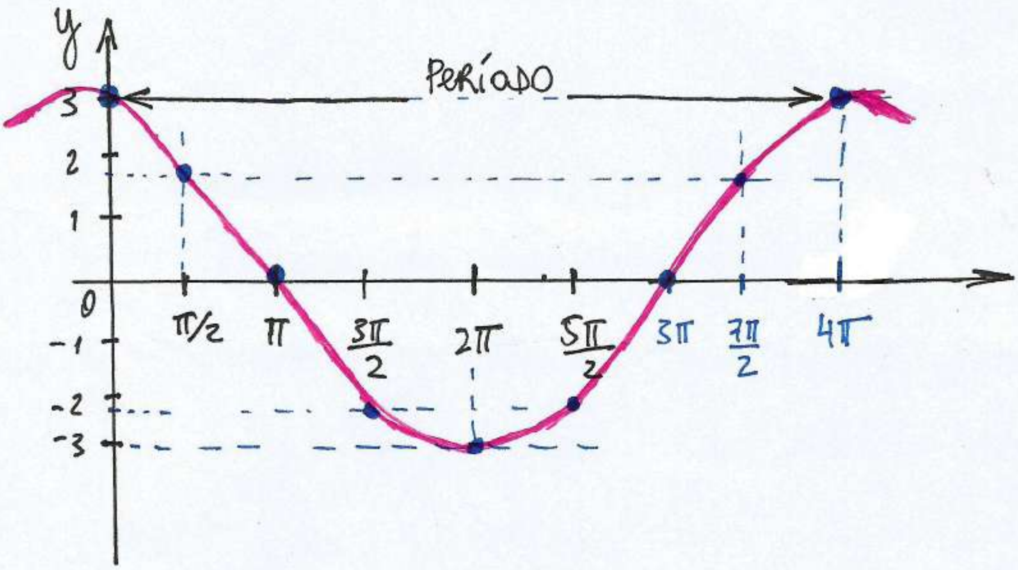
Resposta $\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ Im = [4, 6] \\ P = 2\pi \end{cases}$

13c) $y_{(x)} = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \longrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ e } d=0 \\ b=3 \text{ e } c=1/2 \end{cases}$

Portanto, já podemos dizer que:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ I = [-3, 3] \\ P = 4\pi \end{cases} \qquad \frac{1}{2}P = 2\pi \qquad \boxed{P = 4\pi}$$

Só falta traçar o gráfico:



$y(0) = 3 \cdot \overset{1}{\cancel{\cos}}\, 0° = 3$

$y(\pi/2) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times 0{,}707 = 2{,}12$; $y(\pi) = 3 \cdot \overset{0}{\cancel{\cos}}\left(\pi/2\right) = 0$

$y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \times (-0{,}707) = -2{,}12$; $y(2\pi) = 3 \cdot \overset{-1}{\cancel{\cos}}(\pi) = -3$

$y\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -2{,}12$; $y(3\pi) = 0$;

$y\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 2{,}12$; $y(4\pi) = 3$.

Função Logarítmica (Revisão)

O logarítmo de um número real positivo N, na base a, positiva e diferente de 1, é o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter N.

$$\boxed{a^x = N \iff x = \log_a N}$$

Sistema de logarítmos naturais:

É o sistema de base e (Euler) → $\ln x$ ou $\log_e x$.

Sistema de logarítimos decimais:

É o sistema de base 10 (Briggs) → $\log x$ ou $\log_{10} x$.

* Consequências da definição:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^m = m$$

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\log_a N = \log_a M \iff N = M.$$

* PROPRIEDADES

Considere:

$$\begin{cases} \log_a M = x \implies M = a^x & (1) \\ \log_a N = y \implies N = a^y & (2) \\ \log_a (N\cdot M) = z \implies M\cdot N = a^z & (3) \end{cases}$$

Ao substituir (1) e (2) em (3), temos:

$$a^x \cdot a^y = a^z \therefore a^z = a^{x+y}$$

Logarítmo de um produto: $z = x + y \implies \boxed{\log_a (M\cdot N) = \log_a M + \log_a N}$

Com $M, N > 0$ e $a > 0, a \neq 1$, assim:

Logarítmo de um quociente $\implies \boxed{\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N}$

Logarítimo de uma potência: $\log_a N^m = \log_a N\cdot N\cdot N\cdot N\ldots$

$$= \log_a N + \log_a N + \log_a N + \ldots$$

Portanto $\boxed{\log_a N^M = m \log_a N}$

e $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$

(cologarítmo)

$$\log_a N^{-1} = \underset{\searrow 0}{\log_a 1} - \log_a N = \mathrm{co}\log_a N$$

* MUDANÇA DE BASE.

DADO $\log_a N$ VAMOS INDICÁ-LO EM OUTRA BASE $\rightarrow \log_b N$.

$$\begin{cases} \log_a N = x \Longrightarrow N = a^x \\ \log_b N = y \Longrightarrow N = b^y \end{cases}$$

PORTANTO $a^x = b^y$, AO TOMAR O LOGARÍTMO NA BASE b, temos:

$$\log_b a^x = \log_b b^y$$

$$x \cdot \log_b a = y \overset{1}{\cancel{\log_b b}}$$

$$(\log_a N) \log_b a = (\log_b N)$$, PORTANTO:

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}} \quad \text{em que} \begin{cases} N > 0 \\ 0 < a \neq 1 \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$$

ESTA EXPRESSÃO MOSTRA COMO SE EFETUA A MUDANÇA DE UM LOGARÍTMO DE BASE a P/ UM LOG. DE BASE b.

16/05/22 **Exemplo**: Sendo $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,4$, Calcule $\log_2 6$.

$$\log_2 6 = \frac{\log_{10}(6)}{\log_{10}(2)} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{\log 2}{\log 2} + \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\log_2 6 = 1 + \frac{0,4}{0,3} = \frac{0,7}{0,3} \therefore \boxed{\log_2 6 = 7/3}$$

* GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO LOGARÍTMICA.

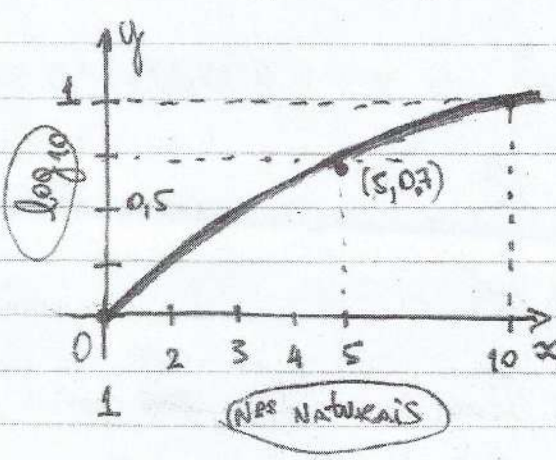
Em geral temos:

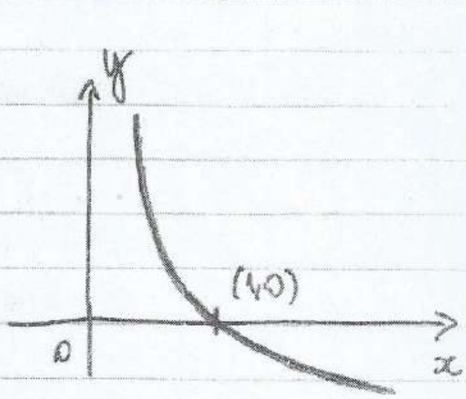
$$f(x) = \log_a x$$

Simetria em relação
à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Crescente qdo. $a > 1$

Decrescente qdo. $0 < a < 1$





Em todas as fases da tecnologia de áudio o decibel é utilizado para expressar os níveis de sinal e as diferenças de nível de pressão sonora, potência, ddp e corrente [2].

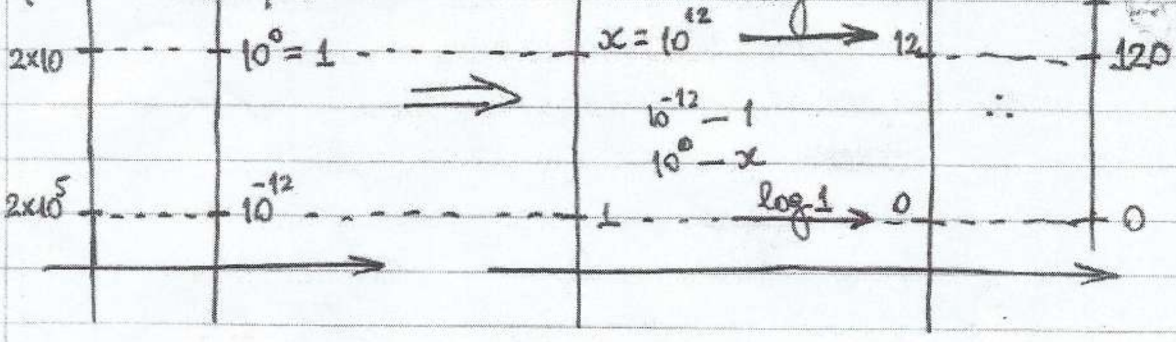
O decibel também faz sentido do ponto de vista psicoacústico, (~~no sentido de que~~) pelo fato de relacionar diretamente com o efeito da maioria dos estímulos sensoriais [2].

O bel é a unidade básica definida como $\log_{10}$ de uma relação de duas potências:

$$\boxed{bel = \log\left(P_1/P_0\right)}$$

Relações de Potência.

Por conveniência, usamos o decibel, que é simplesmente um décimo do bel.



Portanto: $\boxed{\text{decibel} = 10 \log \left(\frac{P_1}{P_0}\right)}$

A tabulação abaixo ilustra a utilidade do conceito.

Ao tomar $P_0 = 1$ watt;

P_1 (Watts)	Nível em dB.
1	0
10	10
100	20
1.000	30
10.000	40
20.000	43

Observe que um intervalo de potências de 20.000 a 1 pode ser expressa de uma forma mais adequada em níveis de db (acima de 1W) [2].

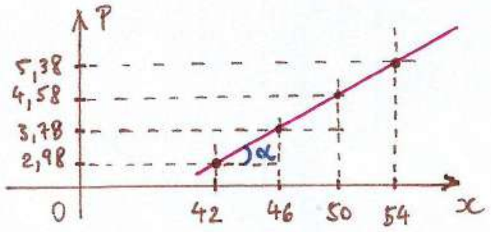
Universidade Federal de Santa Maria
1960
UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 – MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS. 1ª Prova

Matrícula:

01 – A produção de grãos de milho ***P(x)*** pode ser obtida como uma função da quantidade ***x*** de água no solo.

	x *(cm³)*	***P*** *(mg/ha)*	
x_A	42	2,98	y_A
	46	3,78	
	50	4,58	
x_B	54	5,38	y_b



[0,75] (a) A partir da tabela, determine a função correspondente; (b) Determine a inclinação α. [0,25]

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5,38 - 2,98}{54 - 42}$

$m = \frac{2,4}{12} \therefore \boxed{m = 0,2}$

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 2,98 = 0,2(x - 42)$

$y = 0,2x - 8,4 + 2,98$

$\boxed{y = 0,2x - 5,42}$

$m = tg(\alpha)$

$0,2 = tg(\alpha)$

$tg^{-1}(0,2) = \alpha$

$\boxed{\alpha = 11,31^{\circ}}$

(b) Qual é a quantidade de água necessária para produzir 8,58 *mg/ha* de trigo? [1,00]

$8,58 = 0,2x - 5,42 \implies x = \frac{14}{0,2} = \boxed{70\ cm^3}$

02 – Técnicos da Embrapa observaram que a produção de uma lavoura é uma função da quantidade x de adubo por hectare, de acordo com a seguinte tabela:

x (kg/ha)	***P*** *(toneladas)*
0	3
2	5
4	6

(a) Determine a produção em toneladas por hectare quando a terra não é adubada. [0,25]

$P_{(x)} = ax^2 + bx + C$

$\boxed{P_{(0)} = C = 3 \text{ toneLADAS.}}$

(b) Seja a produção ***P(x)*** = ***ax***² + ***bx*** + ***c***, determine os valores de ***a***, ***b*** e ***c***. [1,00]

$P_{(2)} = 5 \implies 5 = 2^2 \cdot a + 2b + 3$

$\boxed{4a + 2b = 2} \times(-2)$

$P_{(4)} = 6 \implies 6 = 16a + 4b + 3$

$\boxed{16a + 4b = 3}$

SiSteMA LiNeAR

$$\begin{cases} 16a + 4b = 3 \\ -8a - 4b = -4 \end{cases}$$

$8a = -1$

$\boxed{a = -1/8}$

PoRtANto:

$16\left(-\frac{1}{8}\right) + 4b = 3$

$4b = 3 + 2$

$\boxed{b = 5/4}$

(c) Determine a produção máxima por hectare. [0,75]

MÁXIMO ⇒ VéRtice
QUANDO $a < 0$

$x_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(-2/8)}$

$x_v = \frac{-5/4}{-1/4} \therefore \boxed{x_v = 5}$

SeNDO: $P(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 3$

$P_{(5)} = -\frac{1}{8} \cdot 25 + \frac{25}{4} + 3$

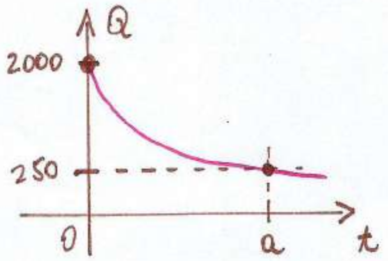
$P_{(5)} = -3,1 + 6,2 + 3 = \boxed{6,125}$ toN.

UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 – MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS. 1ª Prova

Matrícula:

03 – Uma substância se decompões aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-t/3}$, em que K é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e Q(t) é a quantidade de substância (em gramas) no instante t. Considere os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a. [1,50]



$Q_{(t)} = K \cdot 2^{-t/3}$

$Q_{(0)} = \boxed{2000 = K}$

$Q_{(a)} = 250g$

$Q_{(a)} = K \cdot 2^{-a/3}$

$250 = 2000 \cdot 2^{-a/3}$

$2^{-a/3} = 2^{-3}$

$\boxed{a = 9min}$

04 – O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t, é dado por: $N = N_0 e^{rt}$, em que N_0 é o número (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento. Qual é a taxa de crescimento das bactérias (em %), sabendo que o número de bactérias triplica em 2 minutos? [1,50]

$N = N_0 e^{rt}$

$3\cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{2r}$

$2r = \ln(3)$

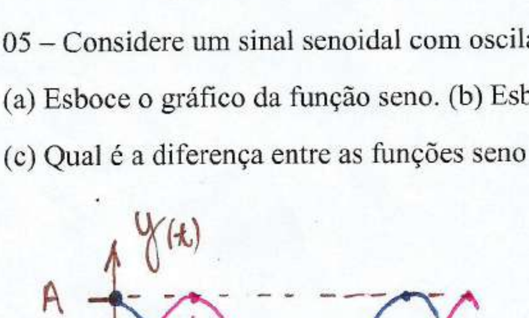
$r = \frac{1,1}{2} = 0,55/min$

$\Rightarrow \boxed{r = 55\%}$

05 – Considere um sinal senoidal com oscilação entre $A = \pm 0,5$m.

(a) Esboce o gráfico da função seno. (b) Esboce o gráfico da função cosseno. [2,00]

(c) Qual é a diferença entre as funções seno e cosseno? [1,00]



(a) $y_{(t)} = A \sin(t)$

(b) $y_{(t)} = A \cos(t)$

(c) UMA DEFASAGEM DE $\pm \pi/2$.

$\Rightarrow \sin(t) = \cos(t \pm \pi/2)$

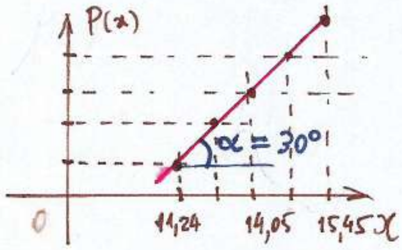
UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 – MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS.

1ª Prova Substitutiva. Matrícula:

01 – A produção de grãos de soja ***P(x)*** pode ser obtida como uma função da quantidade ***x*** de água no solo.

x *(cm³)*	**P** *(mg/ha)*
11,24	2,98
12,64	3,78
14,05	4,58
15,45	5,38



(a) A partir da tabela, determine a função correspondente; (b) Determine a inclinação α.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5{,}38 - 2{,}98}{15{,}45 - 11{,}24}$$

$$m = \frac{2{,}40}{4{,}21} = 0{,}57$$

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A)$$

$$y - 2{,}98 = 0{,}57(x - 11{,}24)$$

$$y = 0{,}57x - 6{,}40 + 2{,}98$$

$$\boxed{y = 0{,}57x - 3{,}43}$$

$$m = tg(\alpha)$$

$$0{,}57 = tg(\alpha)$$

$$tg^{-1}(0{,}57) = \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 30°}$$

(b) Qual é a quantidade de água necessária para produzir 8,58 *mg/ha* de trigo? [1,00]

$$8{,}58 = 0{,}57x - 3{,}43 \Longrightarrow x = \frac{12{,}01}{0{,}57} = \boxed{21{,}07 \, cm^3}$$

02 – Técnicos da Embrapa observaram que a produção de uma lavoura é uma função da quantidade x de adubo por hectare, de acordo com a seguinte tabela:

x *(kg/ha)*	**P** *(toneladas)*
0	3
2	5
4	6

(a) Determine a produção em toneladas por hectare quando a terra não é adubada. [0,25]

(b) Seja a produção $P(x) = ax^2 + bx + c$, determine os valores de a, b e c. [1,00]

(c) Determine a produção máxima por hectare. [0,75]

UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 – MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS. 1ª Prova

Matrícula:

03 – Uma maionese mal conservada causou mal-estar aos frequentadores do restaurante universitário. Uma causa frequente, é a bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei $n(t) = 196 \cdot 2^{at}$, em que $n(t)$ representa o número de bactérias encontradas na amostra de maionese *t* horas pós o início da refeição e *a* é uma constante real.

(a) Sabendo que após 6h do início da refeição $n_{(t=6h)} = 3136$ bactérias, determine ***a***. [0,75]

$n_{(t)} = 196 \cdot 2^{at}$

$n_{(6)} = 196 \cdot 2^{6a}$

$3136 = 196 \cdot 2^{6a}$

$2^{6a} = \frac{3136}{196} = 16 = 4^2 = 2^4$

$\boxed{a = \frac{4}{6} = 2/3}$

(b) Determine o número de bactérias após 12h após o início da refeição. [0,75]

$n_{(t)} = 196 \cdot 2^{\frac{2}{3}t}$

$n_{(12)} = 196 \cdot 2^8$

$n_{(12)} = 196 \cdot (2^4 \cdot 2^4) = 196 \cdot 16^2$

$\boxed{n_{(12)} = 50.176 \text{ BACTÉRIAS.}}$

04 – Em um dia de verão, certa substância que necessita de resfriamento é retirada da geladeira, cuja temperatura é de 12°C, e esquecida em uma sala onde a temperatura está a 30°C. De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a temperatura da substância após t minutos, é dada por $T(t) = 30 - Ae^{-kt}$. Se a substância está a 17°C após 20 minutos, qual será sua temperatura após 40 minutos? [2,50]

$T_{(t=0)} = 12°C$

$T_{(t)} = 30 - Ae^{-Kt}$

$12 = 30 - A$

$A = 18°C$

$T_{(t=20)} = 30 - 18e^{-20K}$

$17 - 30 = -18e^{-20K}$

$e^{-20K} = 13/18$

$20K = \ln(18) - \ln(13)$

$20K = 2{,}89 - 2{,}56$

$K = \frac{0{,}33}{20} = 0{,}0165$

$K = 0{,}0165$

$T_{(40)} = 30 - 18e^{-0{,}0165t \cdot 40}$

$T_{(40)} = 30 - 18e^{-0{,}66}$

$T_{(40)} = 30 - 18 \cdot 0{,}51$

$\boxed{T_{(40)} = 20{,}7°C}$

05 – Considere um sinal senoidal com oscilação entre $A = \pm 0{,}5$m.

(a) Esboce o gráfico da função $y(t) = A \cdot cos(t - 90^0)$. [0,75]

(b) Esboce o gráfico da função $y(t) = A \cdot sen(t + 90^0)$. [0,75]

(c) A partir dos gráficos dos itens (a) e (b), qual sua conclusão? [0,50]

Universidade Federal de Santa Maria
1960

UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 – Matemática Aplicada às Ciências Agrárias

Matrícula:

01 - Um experimento da área de Agronomia mostra que a temperatura mínima da superfície do solo ***t(x)***, em ***°C***, é determinada em função do resíduo ***x*** de planta e biomassa na superfície, em ***g/m²***, conforme registrado na tabela seguinte:

Resíduo x	*x (g/m²)*	10	20	30	40	50	60	70	80
Temp. y(x)	*t(x)*,°C	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60	7,66

[0,75] (a) A partir da tabela, determine a função correspondente; (b) Determine a inclinação **α**. [0,25]

$y(x) = ax + b$

$70a + b = 7{,}6$

$-(20a + b) = 7{,}3 \longrightarrow 20(0{,}006) + b = 7{,}3$

$50a + 0 = 0{,}3$

$a = \frac{0{,}3}{50} = 0{,}006$

$b = 7{,}18$

PORTANTO $\boxed{y = 0{,}006x + 7{,}18}$

$m = a = tg(\alpha) = 0{,}006$

$tg^{-1}(0{,}006) = \boxed{\alpha = 0{,}340}$

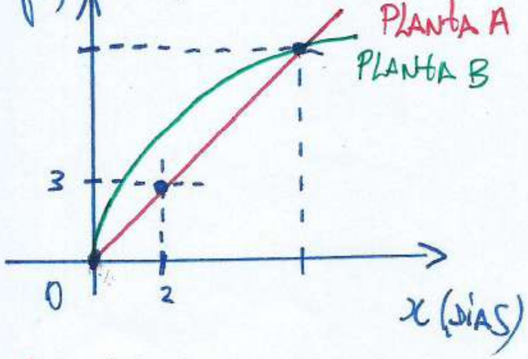
(c) Qual é a quantidade de resíduo necessário para a temperatura do solo ser 8,50 °C ? [0,25]

$y = 0{,}006x + 7{,}18$

$8{,}50 = 0{,}006x + 7{,}18$

$x = \frac{1{,}32}{0{,}06} = \boxed{220 g/m^2}$

[2,75] 02 – Duas plantas de mesma espécie, **A** e **B**, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em **centímetros**, dessas plantas. Após **10 dias** de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da **planta A** é uma reta que passa por **(2, 3)** e o que representa o crescimento da **planta B** pode ser descrito por $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está representado na figura. Determine o dia em que as plantas **A** e **B** atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.



$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3/2$

$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$

$\boxed{y_A = 1{,}5x}$ eq. DA RETA.

FAZENDO $y_A = y_B$, temos:

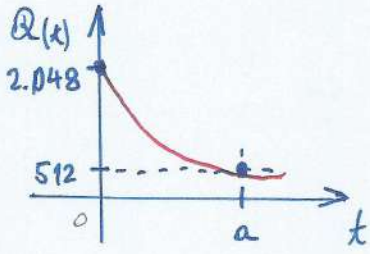
$x^2 - 6x = 0$

$x(x - 6) = 0$ LOGO: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \text{ DIAS} \end{cases}$

$y_A = 1{,}5 \cdot 6 = 9cm$

OU $y_B = \frac{108}{12} = 9cm$

[2,0] 03 – Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-t/2}$, em que K é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e $Q(t)$ é a quantidade de substância (em gramas) no instante t. Considere os dados desse processo de decomposição apresentados no gráfico, determine os valores de K e de a.



$Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$

$Q(t=0) = K = \boxed{2048 g}$

$Q(t=a) = 512 = 2048 \cdot 2^{-\frac{1}{2}t}$

$2^{t/2} = \frac{2048}{512} = 4 = 2^2$

$a = \frac{t}{2} = 2 \therefore \boxed{t = 4min}$

[2,0] 04 – O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = \mathbf{1200} \cdot \mathbf{2}^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?

$N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$

$3.8400 = 1200 \cdot 2^{0,4t}$

$2^{\frac{4}{10}t} = \frac{384}{12}$

$2^{\frac{4}{10}t} = 32$

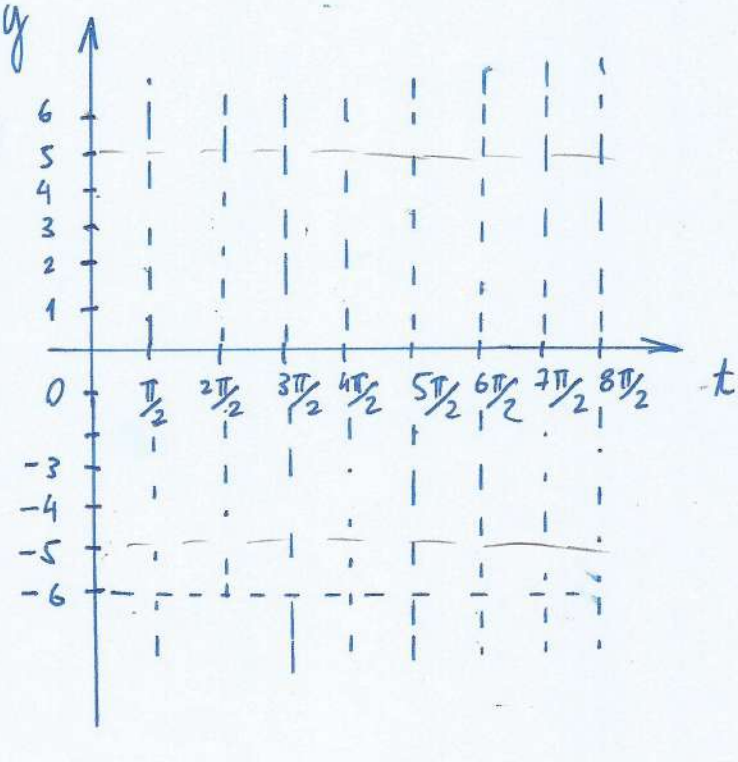
$4t = 50$

$\boxed{t = 12,5h}$

[2,0] 05 – Trace o gráfico da função:

(a) $y(t) = 5 + \cos(t)$;

(b) $y(t) = -5 - sin(t + \overset{\pi/2}{90°})$;



Universidade Federal de Santa Maria
UFSM
Frederico Westphalen

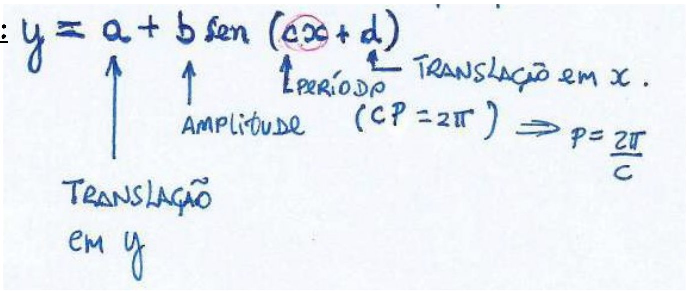
1ª Prova – Matemática Aplicada à Agronomia

05 – Trace o gráfico da função:

(a) $y = 5 + \cos(t)$. (b) $y = -5 - \sin(t+90°)$.;

Vamos fazer tudo passo a passo, e entender cada parâmetro da

<u>função geral:</u>



$$y = a + b\,\text{sen}\,(cx + d)$$

TRANSLAÇÃO em y

AMPLITUDE

PERÍODO

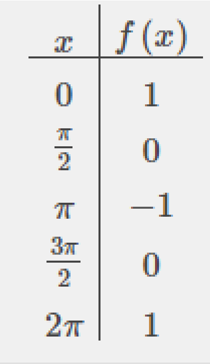
TRANSLAÇÃO em x.

$(CP = 2\pi) \Rightarrow P = \frac{2\pi}{c}$

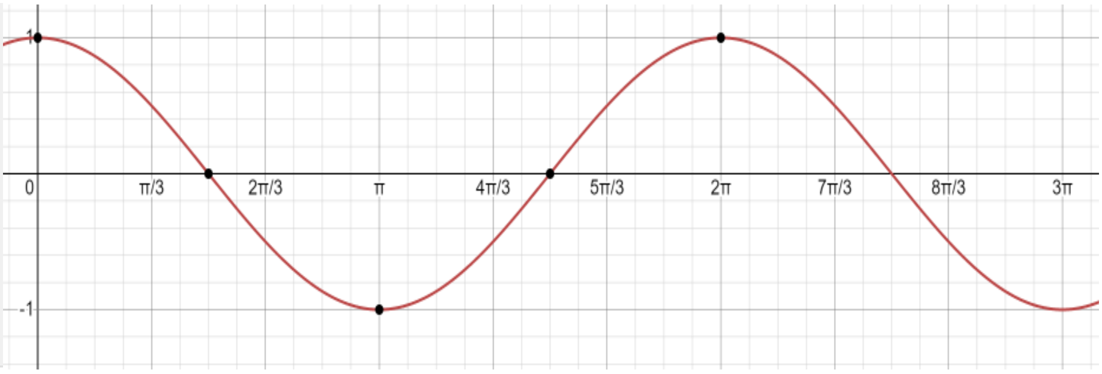
Primeiro, vamos fazer o gráfico da função: $y = \cos(t)$.

Uma observação pertinente, é que: $y = \cos(t)$ é uma função PAR: $f(-t) = f(t)$, ou seja, $\cos(-t) = \cos(t)$, isso significa que o gráfico de

$\cos(-t)$ é idêntico ao gráfico de $\cos(t)$, (simétrico em relação ao eixo y).



x	$f(x)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Reparem que a amplitude total é $b = 2$, a função vai de -1 a 1.

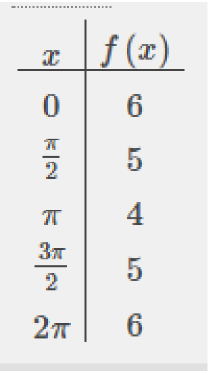
Ao somar uma quantidade $+ a$ na função, $y = +a + \cos(y)$, a senoide vai "subir" a mesma quantidade $+ a$ no eixo y, ou seja, uma translação em y.

Ao somar uma quantidade $- a$ na função, $y = - a + \cos(y)$, a senoide vai "descer" a mesma quantidade $- a$ ano eixo y (verificaremos esse fato no item b, para o seno).

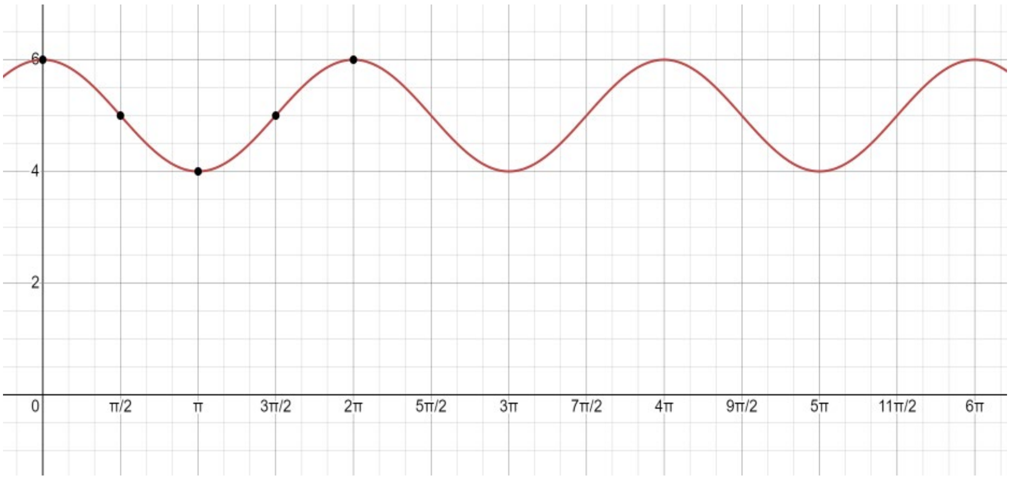
Portanto, se $a = 5$, a amplitude continua $b = 2$.

Entretanto, agora, a função irá oscilar de $-1+5$ a $1+5$, ou seja, de 4 a 6.

Sendo assim, o gráfico do item (a) $y(t) = 5 + \cos(t)$, é:



x	$f(x)$
0	6
$\frac{\pi}{2}$	5
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	5
2π	6



Agora vamos fazer o item b.

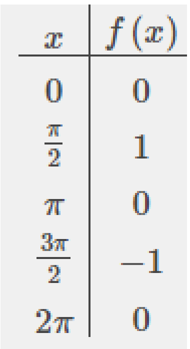
Da mesma maneira, vamos entender primeiro, como é o gráfico da função: $y(x) = \sin(x)$.

Entretanto, a função $y(t) = \sin(t)$ é uma função ÍMPAR: $f(-t) = - f(t)$, ou seja, $\sin(-t) = - \sin(t)$, (simétrico em relação à origem).

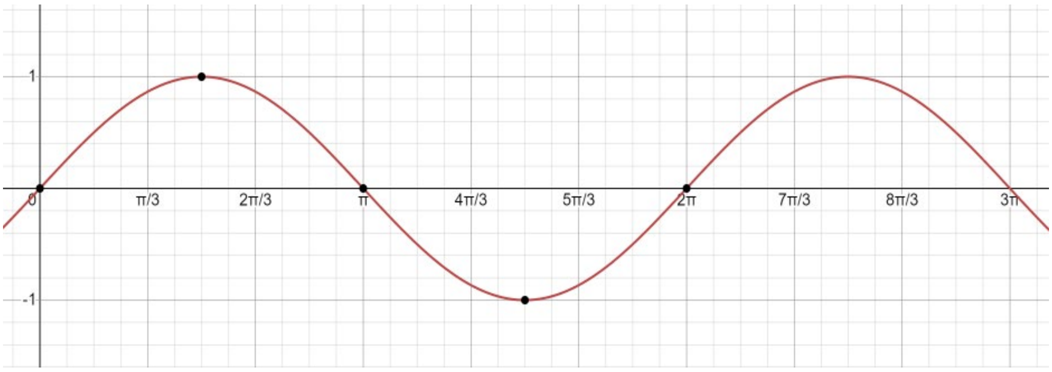
Isso quer dizer que o gráfico de $y(t) = \sin(t)$,
é diferente do gráfico de $y(t) = - \sin(t)$.

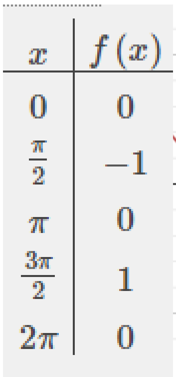
O gráfico de $y(t) = \sin(t)$ inicia crescendo, enquanto que

o gráfico de $y(t) = - \sin(t)$ inicia decrescendo, o gráfico inverte !

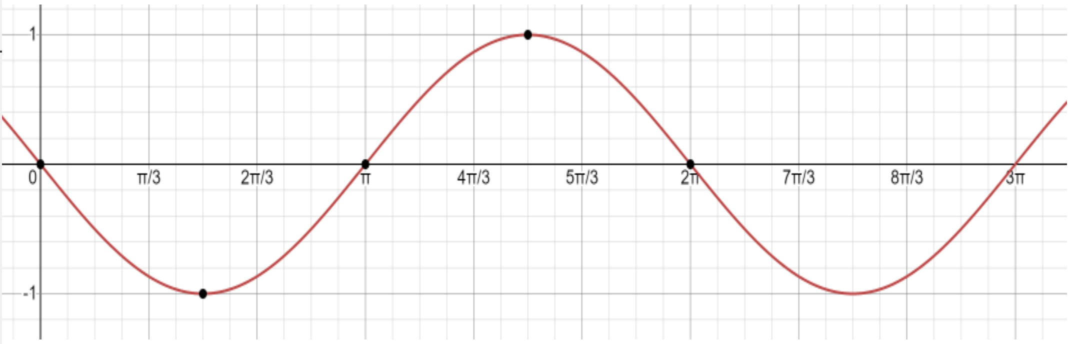


x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0





x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	0

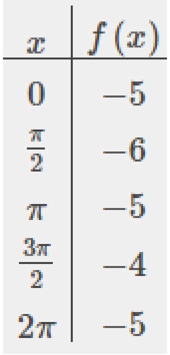


Novamente, temos que a amplitude é b = 2, e a função vai de -1 a 1.

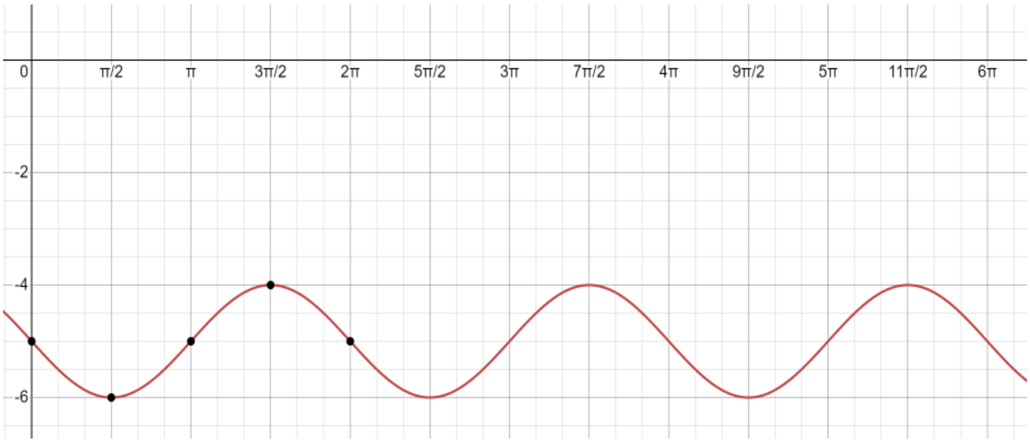
Ao somar uma quantidade - a na função, y(t) = - a - sin(t), a senoide vai "descer" a mesma quantidade - a no eixo y.

Portanto, se a = - 5, e amplitude b = 2,

a senoide vai oscilar de (-1-5) a (1-5), ou seja de -6 a 4.



x	$f(x)$
0	-5
$\frac{\pi}{2}$	-6
π	-5
$\frac{3\pi}{2}$	-4
2π	-5

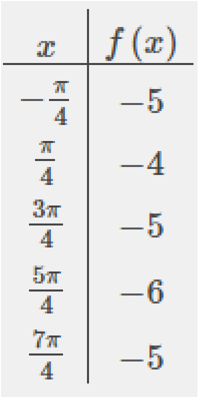


Continuando...

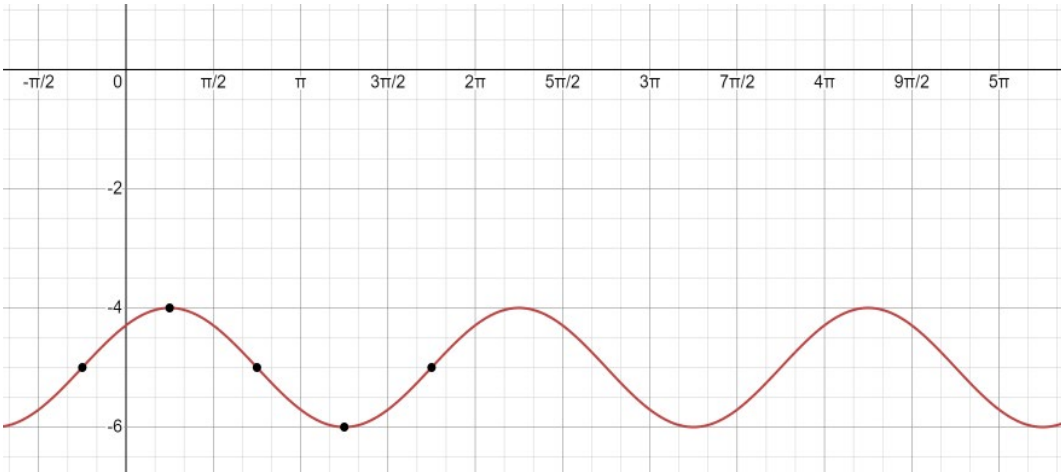
Agora, vamos considerar o parâmetro d que é a translação no eixo x.

Vamos considerar, inicialmente, que d = 45° e observar que o gráfico vai deslocar 45° (ou π/4) para a esquerda (se d = -45°, desloca para a direita)

Então, o gráfico de $y(t) = -5 + \sin(t + \pi/4)$, fica:

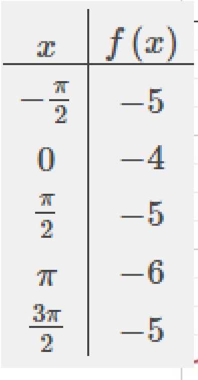


x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{4}$	-5
$\frac{\pi}{4}$	-4
$\frac{3\pi}{4}$	-5
$\frac{5\pi}{4}$	-6
$\frac{7\pi}{4}$	-5

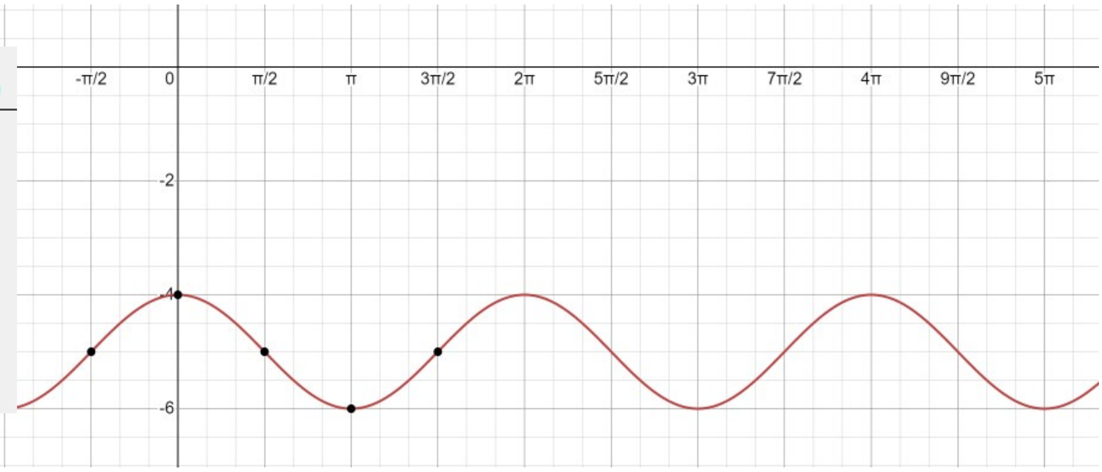


Finalmente, vamos ver como fica o gráfico quando d = 90°

$y(t) = -5 + \sin(t + \pi/2)$



x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	-5
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	-5
π	-6
$\frac{3\pi}{2}$	-5

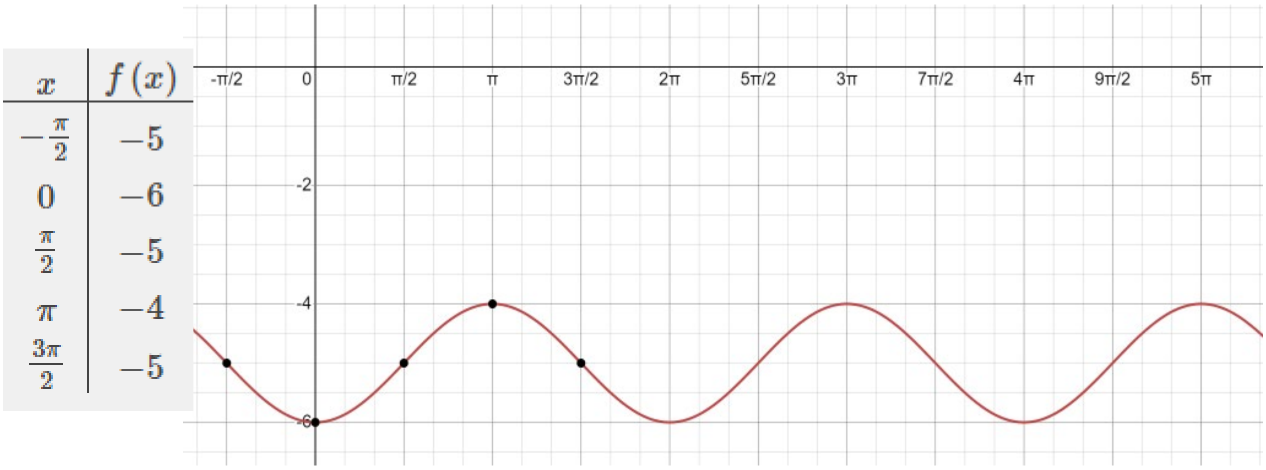


Observem bem!! Acabei de provar que: $\sin(t \pm 90°) = \cos(t)$.

Neste caso, $y(t) = -5 + \sin(t + \pi/2) = -5 + \cos(t)$.

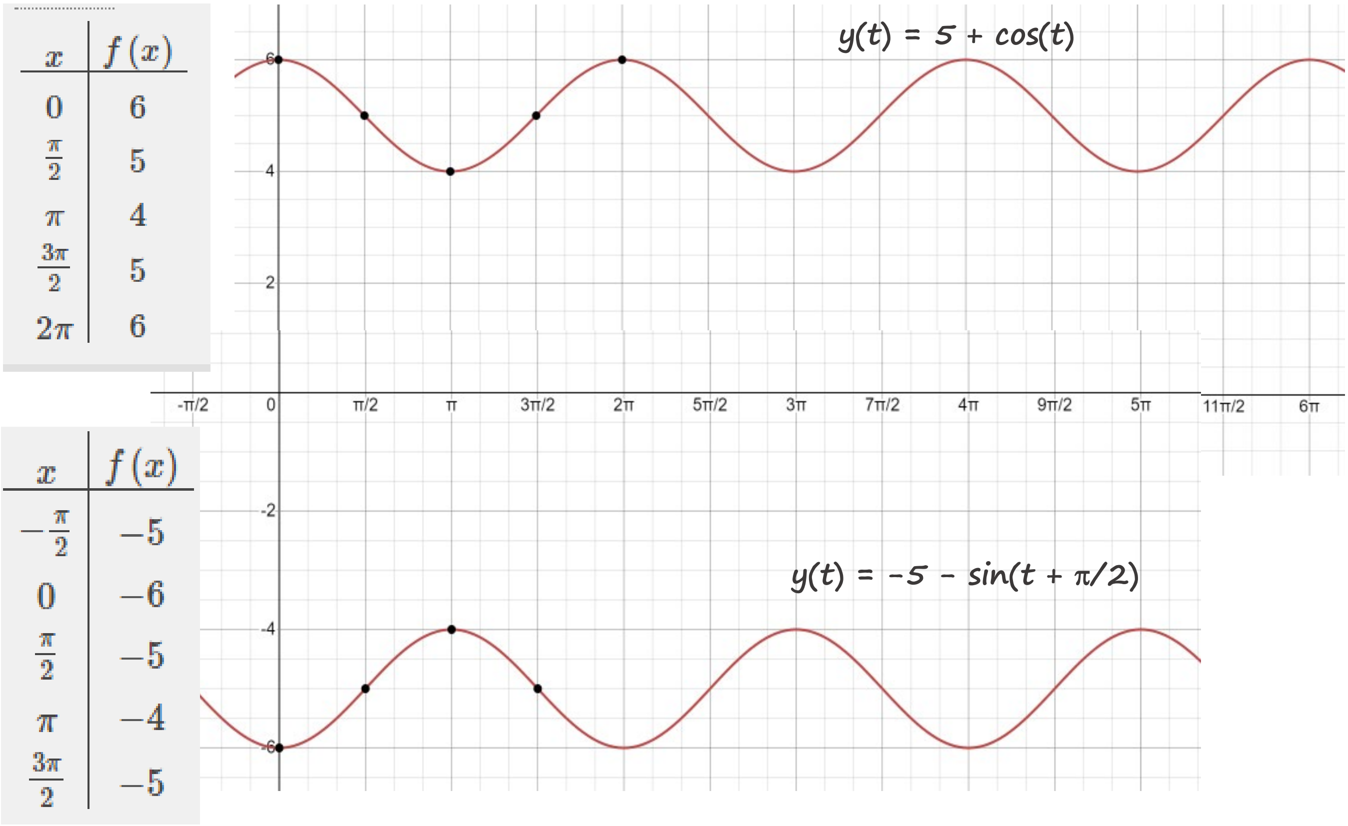
Mas o item (b) a função é: $y(t) = -5 - \sin(t + \pi/2)$.

Portanto, o gráfico fica:



x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	-5
0	-6
$\frac{\pi}{2}$	-5
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	-5

Agora vamos colocar os resultados do item (a) e do item (b) no mesmo gráfico!



x	$f(x)$
0	6
$\frac{\pi}{2}$	5
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	5
2π	6

x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	-5
0	-6
$\frac{\pi}{2}$	-5
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	-5

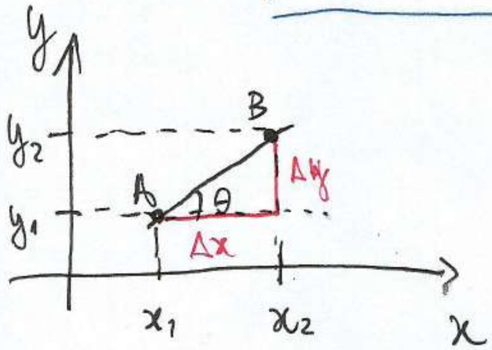
Coeficientes da Reta

Coeficiente Angular

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dois pontos} \\ \text{Distintos} \\ \text{no plano cartesiano.} \end{array} \right.$

Então, o coeficiente angular m do segmento de reta $\overline{AB}$ é dado por

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\theta}$$



Reta

$m > 0 \iff$ crescente

$m < 0 \iff$ decrescente

$m = 0 \iff$ Reta paralela ao eixo x

$m = \nexists \iff$ Reta // y

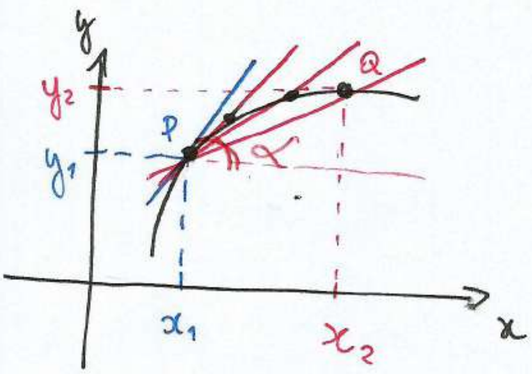
Exemplo: Determine o coef. angular da reta que passa pelos pontos $A(-2,1)$ e $B(3,4)$?

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_B} = \frac{1-4}{-2-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} //$$

$m = 3/5$ $> 0 \rightarrow$ Reta crescente!

Eq. ~~da~~ geral da Reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$ $\quad 5y - 5 = 3x + 10$

Eq. reduzida da Reta $\boxed{y = \frac{3x+15}{5}}$ $\quad y - 1 = m(x+2) \Rightarrow \boxed{5y - 3x - 15 = 0}$



A reta tangente passa pelo ponto $P(x_1, f(x_1))$

A reta secante passa pelos pontos $\begin{cases} Q\,(x_2, f(x_2)) \\ P\,(x_1, f(x_1)) \end{cases}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sendo $\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$, então

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\cancel{x_1} + \Delta x - \cancel{x_1}}$$

$$\boxed{m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}}$$

Coeficiente angular da reta secante.

Quando $\Delta x \rightarrow 0$, a reta secante ficará mais próxima da reta tangente! (Ponto $Q \rightarrow P$).

$$\boxed{m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}} \Longrightarrow f'(x)$$

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO $y = f(x)$ É A FUNÇÃO DENOTADA POR $f'(x)$ TAL QUE SEU VALOR EM $\forall x \in D(f)$ É DADO POR

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

SE ESSE LIMITE EXISTIR. DIZEMOS QUE UMA FUNÇÃO É DERIVÁVEL (OU DIFERENCIÁVEL) QDO. EXISTE A DERIVADA EM TODOS OS PONTOS DE SEU DOMÍNIO.

NOTAÇÕES : $\begin{cases} D_x f(x) \\ D_x y \\ \frac{dy}{dx} \to \text{Leibniz.} \end{cases}$ $y' = f'(x) \to$ LAGRANGE.

EXEMPLO: SEJA $y = \frac{1}{x-2}$ DETERMINE $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-2)^2}}$$

Exemplo: Ache a derivada de $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - [3x^2 - 2x]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6x + 3\Delta x - 2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + \overset{0}{\cancel{3\Delta x}} - 2)$$

$$\boxed{f'(x) = 6x - 2}$$

ou então usando regras de derivação:

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ e $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Então, temos que: $f'(x) = 2 \cdot 3x^{(2-1)} - 2 \cdot 1$

$$\boxed{f'(x) = 6x - 2}$$

* Exercícios do 1 ao 13 é para fazer dos dois jeitos!

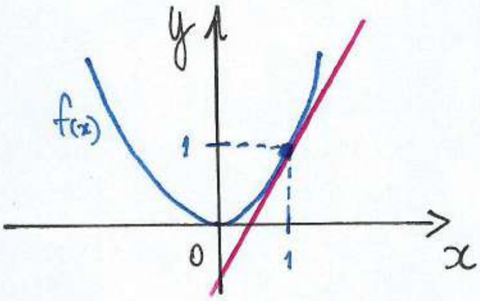
Equação da reta tangente (em um dos seus pontos)

$$\boxed{(y - y_0) = m_{tg}(x - x_0)}$$

Onde $P(x_0, y_0)$ é o ponto de tangência

e o coef. angular é a derivada da função: $m_{tg} = f'_{(x_0)} = y'_0$

Exemplo: Determine a equação da reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.



1º $\longrightarrow$ $f_{(x)} = x^2$ e $f_{(1)} = 1 = y_0$

2º $\longrightarrow$ $f'_{(x)} = 2x$ e $f'_{(1)} = 2 = y'_0 =$

3º $\longrightarrow$ Substituir na eq. da reta:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \textcircled{2}(x - 1)$

$\boxed{y = 2x \cancel{+3}} - 1$

Tarefa

② Determine a equação da reta tangente ao gráfico das funções abaixo, no ponto indicado.

1) $y = (x^2 + 1)(1 - x^3)$ em $x = 1$.

$y = x^2 - x^5 + 1 - x^3 \longrightarrow y_{(1)} = 1^2 - 1^5 + 1 - 1^3 = 0$

$y' = 2x - 5x^4 - 3x^2 \longrightarrow y'_{(1)} = 2 - 5 - 3 = -6$

Ao substituir na equação da reta, temos: $y + 0 = -6(x - 1)$

$$\boxed{y = -6x + 6}$$

Universidade Federal de Santa Maria
1960
UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 - Matemática Aplicada às Ciências Agrárias
2^a Prova: Limite e Derivada.

Problema 1. Considere a função $f(x) = 3x^2 - 2x$;
(a) Esboce o gráfico da função $f(x)$;
(b) Defina dois pontos $A(x_V, y_V)$ e $B(x_B, y_B)$ sobre a função $f(x)$ e determine a equação da reta secante;
(c) Sendo $\Delta x = (x_B - x_V)$, o que é o $lim_{\Delta x \to 0}[m_{sec}]$? O que isso significa? Prove sua resposta.
(d) Determine a equação da reta tangente a curva da função $f(x)$ no ponto $A(x_V, y_V)$. Esboce essa reta.

Problema 2. Use o conceito de limite para determinar a $f'(x)$;
Esboce os gráficos de $f(x)$ e da reta tangente no ponto indicado;
Dê o valor da inclinação da reta m_{tg} para cada caso:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{3}; \quad x = -0,135.$
(b) $f(x) = (2x+1)(3x-1); \quad x = -0,5.$

Problema 3. Determine a derivada de cada função $f(x)$:

(a)$f(x) = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
(b) $f(x) = (6x-7)^3(8x^2+9)^2$;
(c) $f(x) = \left(x^2 - x^{-2}\right)^6$;
(d) $f(x) = ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$

Problema 4. O que se pode dizer sobre os pontos de inflexão de uma função quadrática? Utilize o significado da derivada e da derivada segunda para justificar sua resposta.

Problema 5. Um laranjal da região do Alto Uruguai, produz 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre. Cada árvore plantada a mais causa decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

$y = ax^2 + bx + c$

1- CONSIDE A FUNÇÃO: $f(x) = 3x^2 - 2x$.

$f(x) = x(3x-2)$; RAÍZES:

$x = 0$ e $x = 2/3 = 0,66$

$f(0) = 0$ $f(x) = 3\cancelto{0,25}{\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{2}{2}$

$f(1) = +1$ $f(-1) = 5$

$f(2) = 8$ $f(-2) = 16$

$x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$

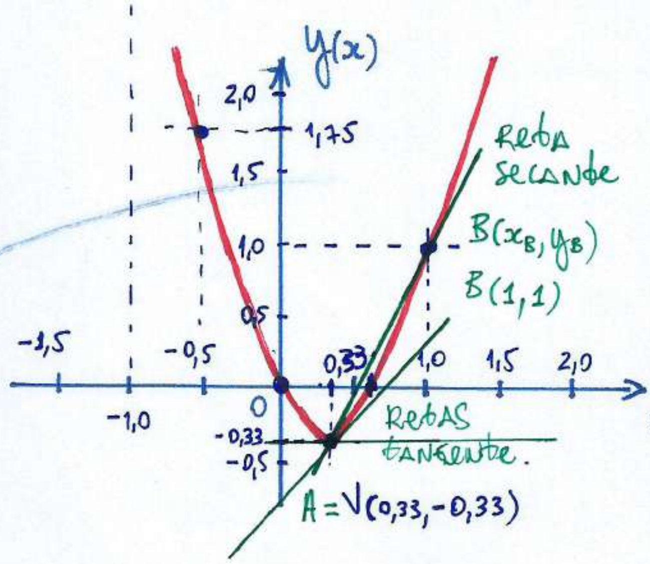
$x_v = +\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}$ e $y_v = -\frac{(4-\cancelto{0}{4\cdot 3\cdot 0})}{12}$

$x_v = \frac{1}{3}$ e $y_v = -\frac{1}{3} = 0,33$

PORTANTO O VÉRTICE:

$V(x_v, y_v) = V\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

1. (a) ESBOCE O GRÁFICO DA $f(x)$; (b) DETERMINE A EQ. DA RETA ENTRE OS PONTOS A e B.



$m_{sec} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 + 0,33}{1 - 0,33}$

$m_{sec} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{4/3}{2/3} = 2.$

A EQ. GERAL DA RETA É DADA POR:

$y - y_A = m(x - x_A)$, ENTÃO:

$y - 0,33 = 2x - 0,66$

$\boxed{y = 2x - 1}$ (b) eq. DA RETA SECANTE.

1. (C) SENDO $\Delta x = (x_B - x_A)$,

temos: $x = x_A + \Delta x$, CONFORME:

$x_B \to x_A$; $\Delta x \to 0$, RETA SEC. VIRA RETA tg EM A.

$$m_{sec} = \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \Rightarrow \boxed{m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[m_{sec}\right] = \frac{df(x)}{dx}}$$

DEFINIÇÃO DA DERIVADA!

1.(d) Determine a eq. da reta tg. a curva $f(x)$ no Pto. $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$

$\begin{cases} A(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \\ B(1, 1) \end{cases}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - [3x^2 - 2x]}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{\Delta x}(6x + 3\Delta x - 2)}{\cancel{\Delta x}} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + \cancelto{0}{3\Delta x} - 2)$$, portanto:

$\boxed{f'(x) = 6x - 2}$ ou sendo $f(x) = 3x^2 - 2x$

$\boxed{f'(x) = 6x - 2}$

Lembrando que a derivada de $f(x)$
em um ponto é m_{tg} naquele ponto, temos:

$f_{(x)} = 3x^2 - 2x$ e $f'(x) = 6x - 2$

eq. geral da reta

$y - y_A = m_{tg}(x - x_A)$

$f_{(x_A = 1/3)} = \left(\frac{3}{9} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

$f'_{(x_A)} = \frac{6}{3} - 2$

Portanto $y_A = -1/3$

$m_{tg} = f'_{(x_A)} = 0$

$y_A = 1/3$

Reta no vértice

2 - Use o conceito: $f'_{(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$

(a) $f(x) = \sqrt{3} + 2x + x^2$; $f'_{(x)} = 2 + 2x$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{\sqrt{3}} + 2(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2 - \cancel{\sqrt{3}} - 2x - x^2}{\Delta x} \right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-2x - x^2 + 2(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2}{\Delta x} \right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{-2x} \cancel{-x^2} + \cancel{2x} + 2\Delta x + \cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{\Delta x}(2 + 2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2 + 2x + \overset{0}{\cancel{\Delta x}} \right]$$

$$\boxed{y' = 2 + 2x}$$

$y(x) = \sqrt{3} + 2x + x^2$

$y(-2) = \sqrt{3} = 1{,}73$

$y(-1) = \sqrt{3} - 1 = 0{,}73$

$y(0) = \sqrt{3} = 1{,}73$

$y(1) = \sqrt{3} + 3 = 4{,}73$

$y(2) = \sqrt{3} + 8 = 9{,}73$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2}$

$x_v = -1$

$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$y_v = \frac{-(4 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3})}{4}$

$y_v = -1 + \sqrt{3}$

$y_v = 0{,}73$

$V(-1; 0{,}73)$

$y'_{(x)} = 2 + 2x$

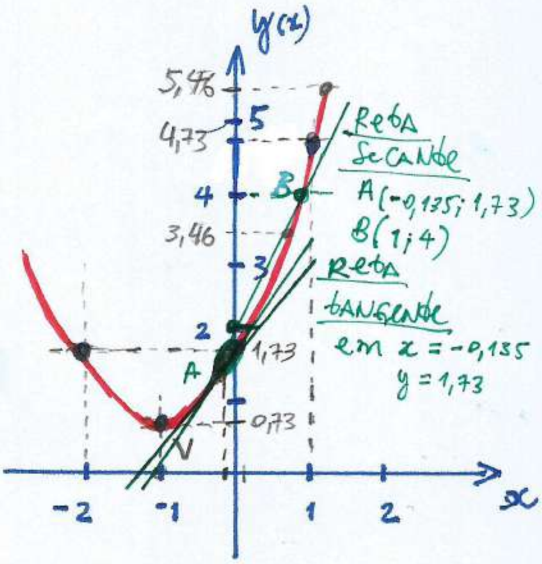
$y'(-2) = -2$; $y'(-0{,}135) = 1{,}73$

$y'(-1) = 0$

$y'(0) = 2$; $y'(0{,}73) = 3{,}46$

$y'(1) = 4$; $y(1{,}73) = 5{,}46$

$y'(2) = 6$



$m = y'_{(-0{,}135)} = 1{,}73$

$y_0 = \sqrt{3} + 2(-0{,}135) + (-0{,}135)^2$

$y_0 \simeq 1{,}05$

$$\boxed{y = 1{,}75x + 1{,}30}$$

2. (b) $f(x) = (2x+1)(3x-2) = (6x^2 - x - 2)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-2 - 1(x+\Delta x) + 6(x+\Delta x)^2 - 6x^2 + 1x + 2}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-\cancel{2} - \cancel{x} - \Delta x + \cancel{6x^2} + 12x\Delta x + 6\Delta x^2 - \cancel{6x^2} + \cancel{x} + \cancel{2}}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-\Delta x + 12x\Delta x + 6\Delta x^2}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cancel{\Delta x}(12x + 6\Delta x - 1)}{\cancel{\Delta x}} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[12x + \overset{0}{\cancel{6\Delta x}} - 1 \right]$$

$$\boxed{f'(x) = 12x - 1}$$

$y(0,5) = \frac{6}{4} - \frac{1}{2} - 2$

$y(0,5) = -1 = y_0$

$y(x) = 6x^2 - x - 2$

$y(-1) = 6 + 1 - 2 = 5$

$y(0) = -2$; [illegible] $= 0$

$y(1) = 6 - 1 - 2 = 3$

$y(-2)' = 24$

$y(2) = 20$

$x_v = -\frac{b}{2a} = +\frac{1}{12} = 0{,}083$

$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$y_v = -\frac{(1 - 42)}{24}$

$y_v = \frac{41}{24} = 1{,}70$

$y'(x) = 12x - 1$

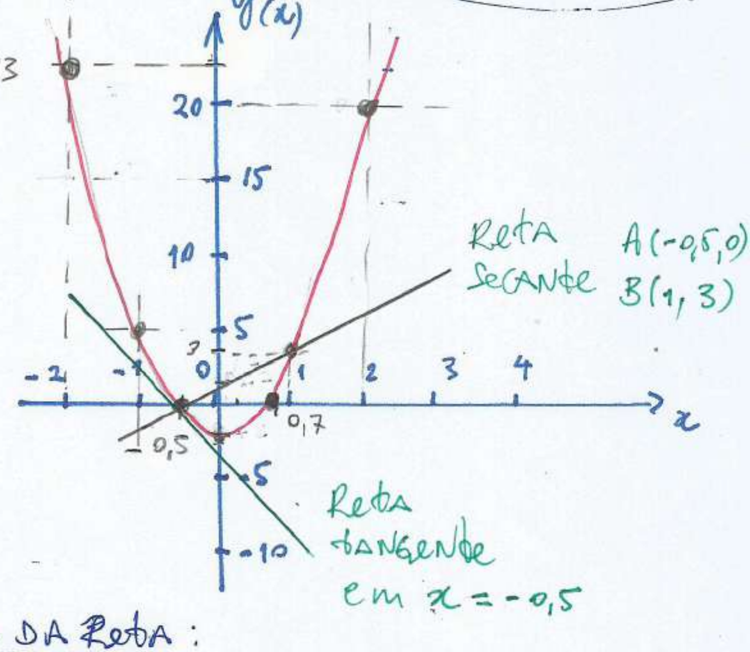
$y'(-1) = -13$

$y'(0) = -1$

$y'(1) = 11$

$y'(0{,}083) = 0$

$y'(0,5) = 5 = m_{tg}$



eq. DA Reta:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\boxed{y = 5x - 7/2}$

3 - DETERMINE A DERIVADA DE CADA FUNÇÃO:

3.(a) $f(x) = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{4x^{3/2}} - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}}$$

3.(b) $f(x) = (6x-7)^3 \cdot (8x^2+9)^2 \longrightarrow y = u \cdot v$

$$\boxed{y' = u'v + uv'}$$

1º REGRA DA CADEIA em u:

$y = (6x-7)^3 \longrightarrow y = u^3$

$\boxed{u = (6x-7)}$

$y = 3u^2$

$\frac{du}{dx} = 6$

$\frac{dy}{du} = 3(6x-7)^2$

$u' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$u' = 3(6x-7)^2 6$

$\boxed{u' = 18(6x-7)^2}$

2º REGRA DA CADEIA em v:

$y = (8x^2+9)^2 \longrightarrow y = v^2$

$\boxed{v = (8x^2+9)}$

$\frac{dv}{dx} = 16x$

$\frac{dy}{dv} = 2v$

$\frac{dy}{dv} = 2(8x^2+9)$

$v' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

$v' = 2(8x^2+9) \cdot 16x$

$\boxed{v' = 32x(8x^2+9)}$

$y' = u'v + uv'$, temos:

$$y' = 18(6x-7)^2(8x^2+9) + (6x-7) \cdot 32x(8x^2+9)$$

$$\boxed{y' = 2(6x-7)^2(9+8x^2)(168x^2-112x+81)}$$

3. (c) $f(x) = (x^2 - x^{-2})^6$

$$u = (x^2 - x^{-2}) \longrightarrow y = u^6$$

$$\frac{du}{dx} = \left(2x + \frac{2}{x^3}\right) \qquad \frac{dy}{du} = 6u^5$$

$$\frac{dy}{du} = 6\,(x^2 - x^{-2})^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^5 \cdot 2\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\boxed{y' = 12\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^5 \left(x - \frac{1}{x^3}\right)}$$

3. (d) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$; $y = \ln(u) \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u = \frac{e^x}{x+1} \; ; \quad u' = \frac{e^x \cdot (x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$u' = \frac{e^x \cdot (x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x e^x}{(x+1)^2}}{\frac{e^x}{x+1}} = \frac{x\cancel{e^x}}{(x+1)^2} * \frac{(x+1)}{\cancel{e^x}} = \frac{x}{x+1}$$

$$\boxed{y' = \frac{x}{(x+1)}}$$

5 - SENDO $n(x)$ O Nº DE LARANJAS P/ x PÉS/ACRE.

$$n_{(x)} = \begin{cases} 600x, \text{ NO INTERVALO } [0,20] \\ x[600-15(x-20)], \text{ EM } [21, b] \end{cases}$$

$n(0) = 600.0 = 0$ $\quad n(x) = x[600-15x(x-20)] = 0$

$$n(x) = \begin{cases} 600x, \; \in [0,20] \\ 600x - 15x(x-20), \; \in [21,60] \end{cases} \qquad x = 60 \therefore b = 60.$$

NO PRIMEIRO INTERVALO A FUNÇÃO NÃO TEM PONTO CRÍTICO DE MODO QUE O VALOR MÁX. É O EXTREMO DO PRÓPRIO INTERVALO: $n(20) = \underline{12}000$.

JÁ O SEGUNDO INTERVALO EXISTE UM PTO. CRÍTICO EM

$x = 30,5$.

$$n'(x) = 0$$

$$900 - 30x \therefore \boxed{x = 30 \text{ PÉS.}}$$

$n(20) = 12000$

$n(21) = 12285$

$\boxed{n(30) = 13.500 \text{ LARANJAS}}$

$n(60) = 0$

4 - Os pontos de inflexão são os pontos nos quais a curvatura de uma (~~função~~) curva troca de sinal, portanto, está associado com trocas de sinal da segunda derivada da função associada a curva. Curvas quadráticas terão derivadas lineares e segundas derivadas constantes. Sendo assim, como a segunda derivada de uma uma curva quadrática nunca trocará o sinal, uma curva quadrática nunca apresentará pontos de inflexão.

PRIMITIVAS (+ cte)

Por exemplo, se $g(x) = x^3$

então $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ → é a primitiva de $g(x)$ pois

$$f'(x) = \frac{4}{4}x^3 = x^3$$

Genericamente: $g(x) = x^n$

tem como primitiva $G(x) = \frac{1}{(n+1)} x^{(n+1)}$

Esta é uma primitiva de $g(x)$, pois

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 3$$

$$H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 7$$

$$H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + Cte$$

Porque a derivada do uma cte é igual a zero!

Logo

P/ indicar a variável

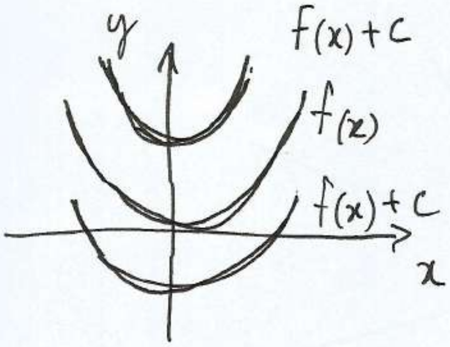
$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

integral

integrando

AS PRIMITIVAS ⟶ integrais indefinidas!

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$



ALGUMAS FÓRMULAS (ANOTEM) : 1) $\int dx = x + C$

2) $$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$$

3) $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

4) $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

5) $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

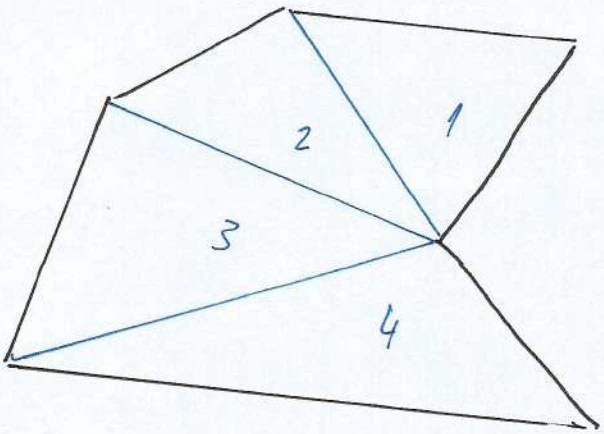
6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = tg^{-1}(x) + C$$

7) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

COM ISSO
JÁ DÁ P/ FAZER
A LISTA 01.

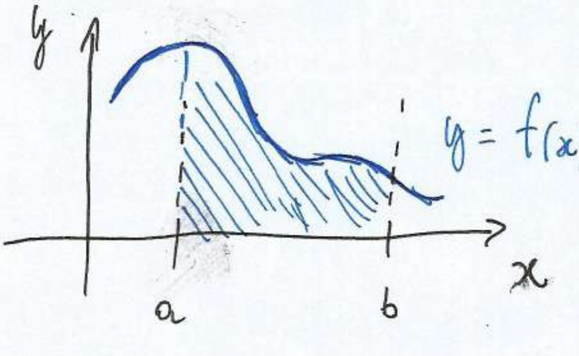
A integral definida.

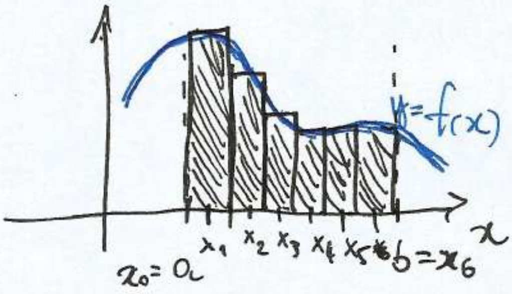
Suponha que queremos calcular a área da fig. abaixo:



Podemos medir os lados de cada triângulo e somar as áreas de cada um deles!

Mas e se a figura tiver um contorno curvo?





$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \longrightarrow$$ Somatória de Riemann.

A estratégia é deixar que as subdivisões fiquem cada vez menores tal que $\Delta x_i \to 0$, e verificamos que a soma das áreas retangulares se aproxima de um limite. Neste caso o valor limitante é chamado de integral definida.

(Área sob a curva!) $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

(Se f(x) for contínua de a a b!) $\longrightarrow$ Lista 02

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Exemplo 1: encontre $\int_0^1 x\,dx$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1/2 \;//$$

Exemplo 02 : Determine $\int_{-1}^{5} x^3\,dx$

$$\int_{-1}^{5} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{(5)^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{625-1}{4} = 156$$

Exemplo 03 : Determine $\int_{0}^{b} x^n\,dx$

$$\int_{0}^{b} x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{0}^{b} = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Exemplo 04 : Determine $\int_{0}^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta$

$$\int_{0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_{0}^{\pi/2} = -\cancelto{0}{\cos(\pi/2)} - (-\cancelto{1}{\cos 0^\circ})$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Exemplo 05 : Determine $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+u}\,du = \text{ARC tg } u\Big|_{0}^{1}$$

$$= \text{ARC tg}(1) - \text{ARC tg}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4$$

(DÁ P/. FAZER A LISTA 03).

Substituição de Variáveis

Seja $f(x) = x$

$$\frac{df}{dx} = f' = 1 \Longrightarrow df = 1\,dx$$

então $\int f(x) = \int 1\,dx = x + c$

Vamos começar com uma função básica (a mesma)

$f(x) = x$ vamos chamar $u(x) = x$

tal que $\frac{du}{dx} = u' \Longrightarrow du = u'\,dx$

$$\int u(x) = \int u'\,dx = u + c$$

Exemplo 1:

Encontre $\int 2t\cos(t^2)\,dt$

$u = t^2$ então

$du = 2t\,dt \Longrightarrow \int 2t\cos(t^2)\,dt = \int \cos(u)\,du$

$$= \sin(u) + c = \boxed{\sin(t^2) + u}$$

Exemplo 2.

ENCONTRE $\int x^3 \cdot (x^4 + 9)^{2/3} dx$

$u = (x^4 + 9) \longrightarrow$ APARENTA SER UMA BOA OPÇÃO!

$du = 4x^3 \, dx \implies x^3 dx = \frac{1}{4} du$

Logo $\int (x^3 \cdot x^{4/3} + 9) \, dx = \frac{1}{4} \int u^{1/3}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} u^{4/3} + c$$

$$= \frac{3}{16} (x^4 + 9)^{4/3} + c$$

Exemplo 3

Encontre $\int_0^{\pi/4} \frac{tg^2(x)}{\cos^2 x}\, dx$

Seja $u_{(x)} = tg(x)$

$$du = \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

extremos de integração em relação a u:

$$, \left\{ \begin{array}{l} tg(\pi/4) = 1 \\ tg(0) = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow !$$

A integral passa a ser

$$\int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = 1/3$$

Integração por Partes

BASEADA NA REGRA DO PRODUTO P/ A DERIVAÇÃO

$$f(x) = u \cdot v$$

$$(uv)' = f'(x) = uv' + u'v \rightarrow \quad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

OU ENTÃO $d(uv) = u\,dv + v\,du$

$$u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Exemplo 4:

ENCONTRE $\int_0^1 3x^2 \cdot \ln x \, dx$

$$u = \ln(x) \qquad v = x^3$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad dv = 3x^2\,dx$$

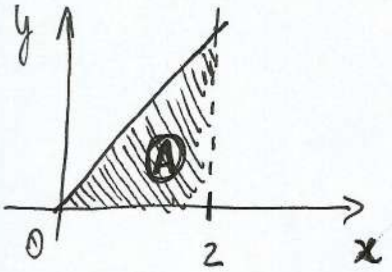
ENTÃO $\int 3x^2 \ln(x)\,dx = uv - \int v\,du$

$$= x^3 \cdot \ln(x) - \int (x^3)\frac{1}{x}\,dx = \int x^2\,dx$$

$$= \boxed{x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{3}x^3 + C}\,\Big|_0^1 = 1/3$$

ÁREAS

Ex.1: Determine a área sob a reta $f(x) = x$ no intervalo $[0,2]$.



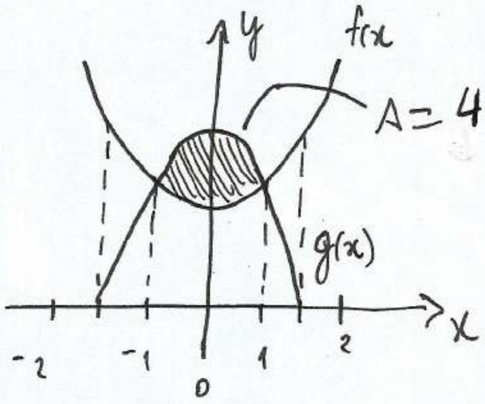
$$A = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{2^2}{2} - \frac{0}{2} = 2$$

Ex.2: Encontre a área entre as duas parábolas

$$y = f(x) = x^2 + 1$$

$$y = g(x) = -2x^2 + 4$$



Sol. 1º encontre os pontos em que as curvas se cruzam, ou seja, os valores de x p/ que:

$$x^2 + 1 = -2x^2 + 4$$

$$\Longrightarrow 3x^2 = 3$$

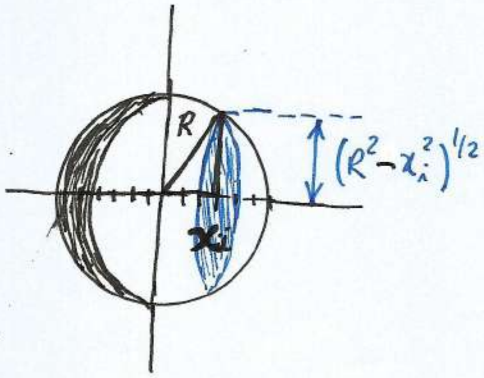
$x = \pm 1$ ⟶ devemos integrar $g - f$ de -1 a 1.

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\,dx$$

$$= (-x^3 + 3x)\Big|_{-1}^{1} = 4$$

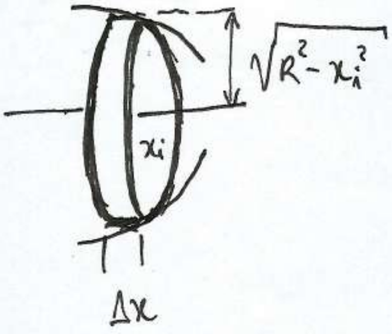
Volumes

Exemplo 1 : Volume de uma esfera.



vamos "fatiar" a esfera no intervalo $[-R,R]$.
em vários intervalos curtos de comprimento Δx

Ou seja, vários discos



O vol. de um disco é o produto:

(Área da base) × (Altura)

$$\pi\left(\sqrt{R^2-x_i^2}\right)^2 \times \Delta x$$

$$\left(\pi R^2-\pi x_i^2\right)\cdot\Delta x$$

Somando os volumes de todos os discos obtém-se

$\sum_{i=1}^{n}(\pi R^2-\pi x_i^2)\Delta x$, fazendo $\Delta x \to 0$, temos a integral

$$V=\int_{-R}^{R}(\pi R^2-\pi x^2)\,dx = \pi R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{3}\pi x^3\Big|_{-R}^{R}$$

$$V = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO: INTEGRAL.

ENCONTRE AS PRIMITIVAS. (NÃO ESQUECER A cte.)

1. $\int 6\,dx = 6x + C$

$\int x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $\int \frac{2}{3}x^4\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^5}{5} + C$

3. $\int (x-2)^{50}dx = \int u^{50}du = \frac{u^{+51}}{51} + C$

$\left.\begin{aligned} u &= (x-2) \\ du &= dx \end{aligned}\right\}$ ENTÃO $\int (x-2)^{50}dx = \frac{(x-2)^{51}}{51} + C$.

4. $\int (1-x)^{-2}dx = -\int u^{-2}du = -(-u^{-1}) + C$

$\left.\begin{aligned} u &= (1-x) \\ du &= -dx \end{aligned}\right\}$ ENTÃO $\int (1-x)^{-2}dx = +\frac{1}{(1-x)} + C$.

5. $\int (a-x)^n\,dx = -\int u^n du = -\frac{u^{n+1}}{n+1}$

$\left.\begin{aligned} u &= (a-x) \\ -du &= dx \end{aligned}\right\}$ ENTÃO $\int (a-x)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

6. $\int \frac{2x}{(9+x^2)}\,dx = \int \frac{2x}{2x}\cdot\frac{du}{u}$

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2+9 \\ du &= 2x\,dx \\ dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}\right\}$$

$\int \frac{2x}{(9+x^2)}\,dx = \ln(u) + c$

integral $= \ln(x^2+9) + c$.

7. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \rightarrow$ integral 14.42 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

integral $= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

8. $\int \sin(2x)\,dx = \int \frac{\sin(u)}{2}\,du = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$.

9. $\int 2\sin(x)\cos(x)\,dx = \int \sin(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$.

10. Lembre da trigonometria que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Conclua que: $\cos(2x) = -2\sin^2(x) + C$.

11. Qual é a constante C no problema 10?

12. $\int \frac{3}{2} x^2 e^{(x^3+1)} dx = \frac{3}{2} \int \cancel{x^2} e^u \cdot \frac{du}{3\cancel{x^2}}$

$u = (x^3 + 1)$

$du = 3x^2 dx$

$dx = \frac{du}{3x^2}$

$\text{integral} = \frac{1}{2} e^u + C$

$\text{integral} = \frac{1}{2} e^{(x^3+1)} + C$

13. $\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} dx = -\int \cancel{\sin(x)} e^u \frac{du}{\cancel{\sin(x)}}$

$u = \cos(x)$

$\frac{du}{dx} = -\sin(x)$

$dx = \frac{-du}{\sin(x)}$

$\text{integral} = -e^u + C$

$\text{integral} = -e^{\cos(x)} + C$

14. $\int \frac{x^2 - 4x}{\sqrt{x^3 - 6x^2}} dx = \int \frac{(x^2-4x)}{3(x^2-4x)} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}}$

$u = (x^3 - 6x^2)$

$du = (3x^2 - 12x) dx$

$dx = \frac{du}{(3x^2 - 12x)}$

$\text{integral} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^{1/2}}$

$\text{integral} = \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$

$\text{integral} = \frac{2}{3} \sqrt{x^2(x-6)} + C$

15. $\int \frac{1}{(x+1)} dx = \int \frac{du}{u}$

$\left. \begin{array}{l} u = x+1 \\ dx = du \end{array} \right\}$ INTEGRAL $= \ln(u) + c$

INTEGRAL $= \ln(x+1) + c$.

16. $\int \frac{1}{(x^2-1)} dx = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a} . \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

INTEGRAL 14.144

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{1}{2} \ln(x-a) - \frac{1}{2} \ln(x+a) + c.$$

17. Mostre que se F for uma primitiva de f, e G for uma primitiva de g, E C e D forem constantes quaisquer, então, CF + DG é uma primitiva de cf + Dg. (Dica derive CF + DG)

18. $\int \left(2x^3 + 15x^2 - \frac{1}{2}x - 7\right) dx = \frac{x^4}{2} + 5x^3 - \frac{x^2}{4} - 7x + C$

19. $\int \left(\sin^2(\theta)\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\sin(\theta)\right) d\theta$

$u = \sin(\theta)$ $\qquad$ $u = \cos(\theta)$

$du = \cos(\theta)\, d\theta$ $\qquad$ $-du = +\sin(\theta)\, d\theta$

$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c$ $\qquad$ $\int -u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + c$

$\int \sin^2(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \frac{\sin^3(\theta)}{3} + c;$ $\quad$ $\int \cos^2(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = -\frac{\cos^3(\theta)}{3} + C$

PORTANTO A INTEGRAL 19 $= +\frac{1}{3}\left[\sin^3(\theta) - \cos^3(\theta)\right] + C$

20. $\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx = \int \frac{e^x}{2} dx + \int \frac{e^{-x}}{2} dx$

$$\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx = \left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) + C$$

NOTA 03

TAREFA 01

ENCONTRE A PRIMITIVA DE :

21) $$\int\left(\frac{3t^2}{t^3-t^2+1}\right)dt - \int\left(\frac{2t}{t^3-t^2+1}\right)dt$$

$$\text{Chame}: u=(t^3-t^2+1)$$

$$du=(3t^2-2t)\,dt$$

Teremos então

$$\int\frac{1}{u}\,du = \ln|u|$$, substituindo o valor de u

$$= \boxed{\ln(t^3-t^2+1)} + C$$

22. $$\int\left(t^{3/2}+t^{5/2}-4t^{-3/2}\right)dt = \frac{t^{5/2}}{5/2}+\frac{t^{7/2}}{7/2}+\frac{t^{-5/2}}{5/2}$$

23. $\int |x|\,dx$

TAREFA 01

24) Se $F'(x) = f(x)$, QUAL O VALOR DE $\int f(x-a)\,dx$?

VAMOS SUPOR QUE $f(x) = x$

$$F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \implies F'(x) = f(x)$$

Se $f(x-a) = (x-a)$

$$\int (x-a)\,dx = \frac{x^2}{2} - ax + C$$

$$= \boxed{F(x) - aF'(x)}$$

//

VAMOS SUPOR AGORA QUE $f(x) = x^2$

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \implies F'(x) = f(x)$$

Se $f(x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

$$\int (x-a)^2\,dx = \frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x + C$$

$$= \boxed{F(x) - aF'(x) + \frac{a^2}{2}F''(x)}$$

PROVAVELMENTE (COMPROVE ISSO!)

Se $f(x) = x^3 \implies f(x-a) = (x-a)^3$.

$$\int (x-a)^3\,dx = \boxed{F(x) - aF'(x) + \frac{a^2}{2}F''(x) - \frac{a^3}{3}F'''(x)}$$

Acho que a $\int f(x-a)\,dx = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^n}{n} \cdot \frac{d^nF}{dx^n} \right) + C$

Teste p/ $n = 2 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n=2} \frac{a^n}{n} \cdot \frac{d^nF}{dx^n} = F + aF' + \frac{a^2}{2}F''$

Obs.: Preciso rever! Não fiz testes com outras funções.

Série de Taylor!

Tarefa 01

25) $\int \frac{f'}{f} dx = n \ln|f(x)| + c$

Supor $f(x) = x$ p/ conferir

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Se $f(x) = x^2$

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2} = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| + C$$

Se $f(x) = x^3$

$$\int \frac{3x^2}{x^3} = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln \cdot |x| + C$$

Se $f(x) = x^n$

$$\int \frac{nx^{n-1}}{x^n} dx = \int n x^{-1} dx = \int \frac{n}{x} dx = \boxed{n \ln|x| + c}$$

Se $f(x) = (3x+1)$

$$\int \frac{3}{(3x+1)} dx = 1 \cdot \ln(3x+1) + C$$

PROBLEMAS

CALCULE AS INTEGRAIS (DEFINIDAS)

1. $$\int_{-3}^{20} 6\,dx = 6x\Big|_{-3}^{20} = 6\cdot(20) - 6(-3) = 120 - (-18) = 138$$

2. $$\int_{-1}^{5} \frac{2}{3}x^4\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{5} = \frac{2}{15}\cdot\left[5^5 - (-1)^5\right] = \frac{2}{15}\left(3125 + 1\right) = \frac{6252}{15}$$

3. $$\int_{3}^{4} (x-2)^{50}\,dx = \int_{3}^{4} u^{50}\,du = \frac{(x-2)^{51}}{51}\Big|_{3}^{4}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (x-2)^{50} \\ du &= dx \end{aligned}\right\} \qquad \int_{3}^{4} u^{50}\,du = \frac{(4-2)^{51}}{51} - \frac{(3-2)^{51}}{51} = \frac{(2^{51} - 1)}{51}$$

4. $$\int_{1/2}^{2/3} (1-x)^{-2}\,dx = \int_{1/2}^{2/3} -u^{-2}\,du = u^{-1}\Big|_{1/2}^{2/3} = (1-x)^{-1}\Big|_{1/2}^{2/3}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (1-x) \\ dx &= -du \end{aligned}\right\} \qquad -\int_{1/2}^{2/3} u^{-2}\,du = (1-2/3)^{-1} - (1-1/2)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1/3} - \frac{1}{1/2} = 3 - 2 = 1$$

5. $\int_{a}^{a+1} (a-x)^{n}\,dx = -\int_{a}^{a+1} u^{n}\,du = \frac{-u^{n+1}}{n+1}\Big|_{a}^{a+1}$

$$\left.\begin{array}{l} u=(a-x) \\ -du = dx \end{array}\right\}$$

$$\frac{-(a-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_{a}^{a+1}$$

$$\frac{-(\cancel{a}-\cancel{a}+1)^{n+1}}{(n+1)} \cancelto{0}{+\frac{(a-a)^{n+1}}{(n+1)}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}$$

6. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^{2}}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(\sqrt{2}/2)$

integral 14.42 = (90° − 45°) = 45° ou $\pi/4$.

7. $\int_{\pi/4}^{7\pi/2} \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/2} \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos(u)\Big|_{\pi/4}^{7\pi/2}$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\,dx \\ dx = \frac{1}{2}\,du \end{array}\right\} \quad -\frac{1}{2}\left[\cancelto{-1}{\cos(7\pi)} - \cancelto{0}{\cos(\pi/2)}\right] = +1/2$$

$$8.\ \int_{2}^{e^2+1} \frac{dx}{1-x} = -\int_{2}^{e^2+1} \frac{du}{u} = -\ln|u|\Big|_{2}^{e^2+1} = -\ln|1-x|\Big|_{2}^{e^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 1-x \\ du &= -dx \end{aligned}\right\} \qquad \int_{2}^{e^2+1} \frac{dx}{1-x} = -\left[\overset{2}{\ln|1-e^2-1|} - \overset{\text{COMPLEXO!}}{\ln|1-2|}\right] = -2$$

$$9.\ \int_{4}^{25} \left(t^{3/2} + t^{5/2} - 4t^{-7/2}\right) dt = \left(\frac{t^{5/2}}{5/2} + \frac{t^{7/2}}{7/2} + \frac{4t^{-5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_{4}^{25}$$

$$\left(\frac{25^{5/2}}{5/2} + \frac{25^{7/2}}{7/2} + \frac{4 \cdot 25^{-5/2}}{5/2}\right) - \left(\frac{4^{5/2}}{5/2} + \frac{4^{7/2}}{7/2} + 4 \cdot \frac{4^{-5/2}}{5/2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{9.765.625}}{5/2} - \frac{\sqrt{1024}}{5/2} = \frac{(3125-32)\times 2}{5} = \frac{6186}{5}$$

$$\frac{\left(\sqrt{6.103.515.625} - \sqrt{16.384}\right)\times 2}{7} = \frac{(78.125 - 128)\times 2}{7} = \frac{155.994}{7}$$

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{9.765.625}} - \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1.024}} = \frac{3.093}{62.500}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6.186}{5} + \frac{155.994}{7} + \frac{3.093}{62.500} = \boxed{\frac{102.908.783.49}{437.500}}$$

$$10.\ \int_{-1}^{2} \frac{3}{2} x^2 e^{(x^3+1)}\, dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{2} \frac{1}{\cancel{3x^2}} \cancel{x^2} e^{u}\, du$$

$u = x^3 + 1$

$du = 3x^2\, dx$

$dx = \frac{1}{3x^2}\, du$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{(x^3+1)} \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2} e^{9} - \frac{1}{2} e^{0}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{3}{2} x^2 e^{(x^3+1)}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}(e^{9} - 1)}$$

$$11.\ \int_{5\pi/6}^{11\pi/6} (\sin^2\theta \cos\theta + \cos^2\theta \cdot \sin\theta)\, d\theta$$

$u = \sin(\theta)$

$du = \cos(\theta)\, dx$

$dx = \frac{du}{\cos(\theta)}$

$$\int_{5\pi/6}^{11\pi/6} u^2 \cancel{\cos(\theta)} \frac{du}{\cancel{\cos(\theta)}} = \frac{u^3}{3} \Big|_{5\pi/6}^{11\pi/6}$$

$$\frac{1}{3}\left[\sin^3\overset{-1/2}{(11\pi/6)} - \sin^3\underset{1/2}{(5\pi/6)}\right] = -\frac{1}{12}$$

$u = \cos(\theta)$

$du = -\sin(\theta)\, dx$

$dx = -\frac{du}{\sin(\theta)}$

$$-\int_{5\pi/6}^{11\pi/6} u^2 \cdot \cancel{\sin(\theta)} \frac{du}{\cancel{\sin(\theta)}} = -\frac{u^3}{3} \Big|_{5\pi/6}^{11\pi/6}$$

$$-\frac{1}{3}\left[\cos^3\overset{330^\circ\ \sqrt{3}/2}{(11\pi/6)} - \cos^3\underset{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overset{150^\circ}{(5\pi/6)}}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

PORTANTO, INTEGRAL 11 $= \boxed{-\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$

TAREFA 03 (Nota 03)

12. Mostre que se $|f(x)| \leq M$ num intervalo $[a,b]$

Então
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant M(b-a)$$

Se $f(x) = M$ p/ $\forall x$ em $[a,b]$

temos que $M(b-a) = \int_a^b M\,dx$ (Teorema i)

Como $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, existirá extremos:
um m (mínimo) e M (máximo) (Teorema do valor extremo).

com $f(x) \geqslant m \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,dx \geqslant m(b-a)$

e $M \geqslant f(x) \Longrightarrow \int_a^b M\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$

ou seja $\boxed{M(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx}$

Conclua que, se há duas funções f e g tais que
$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ em todo intervalo, então:
$$\left| \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \right| \leq \varepsilon\,(b-a).$$

Lista 03

1. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{u}\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$I_1 = \frac{1}{2}\ln(u) + c$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c}$$

2. $\int x(1+x^2)^{-2}dx = \int \frac{\cancel{x}}{u^2}\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$

$u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{u}\right) + c$

$$\boxed{I_2 = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c}$$

3. $\int \sin(t)\,e^{n\cos(t)}\cdot dt = -\int \cancel{\sin(t)}\,e^{u}\frac{du}{n\cancel{\sin(t)}}$

$u = n\cos(t)$

$du = -n\sin(t)dt$

$dt = -\frac{du}{n\sin(t)}$

$I_3 = -\frac{1}{n}\int du = -\frac{e^u}{n} + c$

$$\boxed{I_3 = \frac{-e^{n\cos(t)}}{n} + c}$$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(u+1)^2}{9\sqrt{u}}du$; $(u+1)^2 = (u+1)(u+1)$

$(u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

$u = (3x-1) \longrightarrow x = \frac{1}{3}(u+1)$

$du = 3dx$

$dx = \frac{1}{3}du$

$$I_5 = \frac{1}{3}\int\left(\frac{u^2}{9u^{1/2}} + \frac{2u}{9u^{1/2}} + \frac{1}{9u^{1/2}}\right)du$$

$$I_5 = \frac{1}{3}\left[\int \frac{u^{3/2}}{9}du + \int \frac{2u^{1/2}}{9}du + \int \frac{1}{9u^{1/2}}du\right]$$

$$I_5 = \frac{1}{27}\int u^{3/2}du + \frac{2}{27}\int u^{1/2}du + \frac{1}{27}\int u^{-1/2}du$$

$$I_5 = \frac{2u^{5/2}}{135} + \frac{4u^{3/2}}{81} + \frac{2u^{1/2}}{27} + c$$

$$I_5 = \frac{2}{135}(3x-1)^{5/2} + \frac{4}{81}(3x-1)^{3/2} + \frac{2}{27}\sqrt{3x-1} + c$$

$$\boxed{I_5 = \frac{2}{405}(3x-1)^{1/2}(27x^2 + 12x + 8) + \text{cte.}}$$

$$6.\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(u)\cdot\cos(u)\,du = \int \cos^2(u)\,du$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin(u) \\ dx &= \cos(u)\,du \end{aligned}\right\}$$

ENTÃO $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \cos(u)$

$du = \frac{dx}{\cos(u)} \Rightarrow u = \frac{1}{\sin(x)}$

AO ESCREVER $\cos^2(u) = \frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}$, temos:

$$I_6 = \int \left[\frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}\right] du$$

$$I_6 = \frac{1}{2}\int \cos(2u)\,du + \frac{1}{2}\int du$$

$$\left.\begin{aligned} s &= 2u \\ ds &= 2\,du \\ du &= \frac{ds}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I_6 = \frac{1}{2}\int \cos(s)\,\frac{ds}{2} + \frac{1}{2}u + c$$

$$I_6 = \frac{1}{4}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{subst.}}}{\sin(s)} + \frac{1}{2}u + C$$

$$I_6 = \frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{1}{2}u + c$$

LEMBRANDO QUE: $\sin(2u) = 2\sin(u)\cdot\cos(u)$

$$I_6 = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin(u)\cdot\cos(u) + c$$

$$I_6 = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin(u)\cdot\sqrt{1-\sin^2(u)} + c$$

$$\boxed{I_6 = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin(x)}\right] + \text{Cte.}}$$

Take the integral:

7. $\int \sqrt{2x+5}\,(x^3+x+1)\,dx$

For the integrand $\sqrt{2x+5}\,(x^3+x+1)$, substitute $u=\sqrt{2x+5}$ and $du=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,dx$:

$$=\int u^2\left(\frac{1}{8}(u^2-5)^3+\frac{1}{2}(u^2-5)+1\right)du$$

Expanding the integrand $u^2\left(\frac{1}{8}(u^2-5)^3+\frac{1}{2}(u^2-5)+1\right)$ gives $\frac{u^8}{8}-\frac{15u^6}{8}+\frac{79u^4}{8}-\frac{137u^2}{8}$:

$$=\int\left(\frac{u^8}{8}-\frac{15u^6}{8}+\frac{79u^4}{8}-\frac{137u^2}{8}\right)du$$

Integrate the sum term by term and factor out constants:

$$=\frac{1}{8}\int u^8\,du-\frac{15}{8}\int u^6\,du+\frac{79}{8}\int u^4\,du-\frac{137}{8}\int u^2\,du$$

The integral of u^8 is $\frac{u^9}{9}$:

$$=\frac{u^9}{72}-\frac{15}{8}\int u^6\,du+\frac{79}{8}\int u^4\,du-\frac{137}{8}\int u^2\,du$$

The integral of u^6 is $\frac{u^7}{7}$:

$$=-\frac{15u^7}{56}+\frac{u^9}{72}+\frac{79}{8}\int u^4\,du-\frac{137}{8}\int u^2\,du$$

The integral of u^6 is $\frac{u^7}{7}$:

$$= -\frac{15\,u^7}{56} + \frac{u^9}{72} + \frac{79}{8}\int u^4\,du - \frac{137}{8}\int u^2\,du$$

The integral of u^4 is $\frac{u^5}{5}$:

$$= \frac{79\,u^5}{40} - \frac{15\,u^7}{56} + \frac{u^9}{72} - \frac{137}{8}\int u^2\,du$$

The integral of u^2 is $\frac{u^3}{3}$:

$$= \frac{u^9}{72} - \frac{15\,u^7}{56} + \frac{79\,u^5}{40} - \frac{137\,u^3}{24} + \text{constant}$$

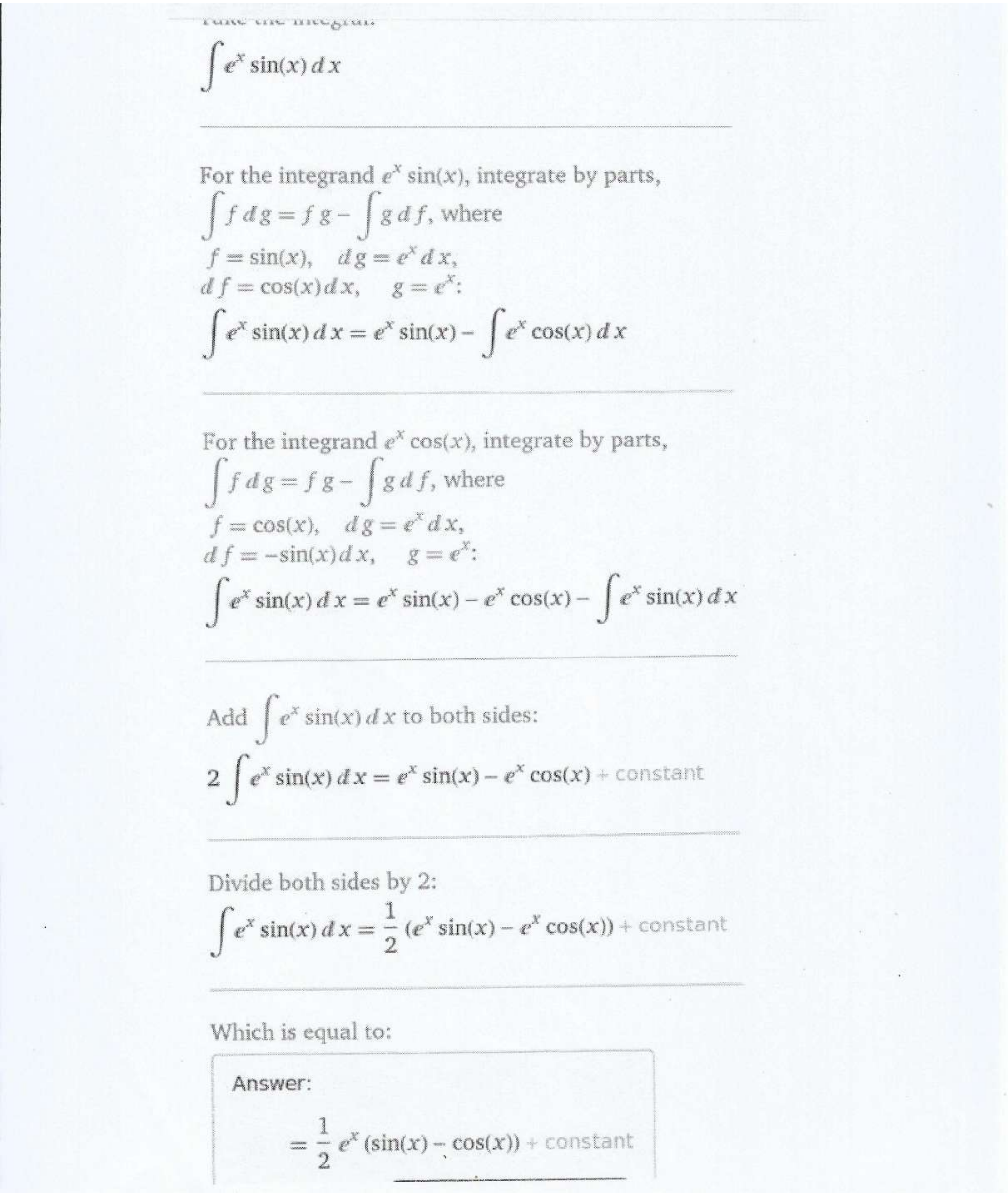
Substitute back for $u = \sqrt{2\,x+5}$:

$$= \frac{1}{72}(2\,x+5)^{9/2} - \frac{15}{56}(2\,x+5)^{7/2} + \frac{79}{40}(2\,x+5)^{5/2} - \frac{137}{24}(2\,x+5)^{3/2} + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= \frac{1}{315}(2\,x+5)^{3/2}(35\,x^3 - 75\,x^2 + 213\,x - 250) + \text{constant}$$



Take the integral:

$$\int e^x \sin(x)\,dx$$

For the integrand $e^x \sin(x)$, integrate by parts, $\int f\,dg = f\,g - \int g\,df$, where

$f = \sin(x), \quad dg = e^x\,dx,$

$df = \cos(x)\,dx, \quad g = e^x:$

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

For the integrand $e^x \cos(x)$, integrate by parts, $\int f\,dg = f\,g - \int g\,df$, where

$f = \cos(x), \quad dg = e^x\,dx,$

$df = -\sin(x)\,dx, \quad g = e^x:$

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

Add $\int e^x \sin(x)\,dx$ to both sides:

$$2\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \text{constant}$$

Divide both sides by 2:

$$\int e^x \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) - e^x \cos(x)\right) + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + \text{constant}$$

Indefinite integral

Take the integral:

$$\int e^{-t}\, t\, dt$$

For the integrand $e^{-t}t$, integrate by parts, $\int f\, dg = f g - \int g\, df$, where

$f = t, \quad dg = e^{-t}\, dt,$

$df = dt, \quad g = -e^{-t}:$

$$= -e^{-t}t + \int e^{-t}\, dt$$

For the integrand e^{-t}, substitute $u = -t$ and $du = -dt$:

$$= -e^{-t}t - \int e^{u}\, du$$

The integral of e^{u} is e^{u}:

$= -e^{-t}t - e^{u}$ + constant

Substitute back for $u = -t$:

$= -e^{-t}t - e^{-t}$ + constant

Which is equal to:

Answer:

$= -e^{-t}(t+1)$ + constant

Indefinite integral

Take the integral:

$$\int \log^2(x)\, d\,x$$

For the integrand $\log^2(x)$, integrate by parts,

$\int f\, d\,g = f\, g - \int g\, d\,f$, where

$f = \log^2(x), \quad d\,g = d\,x,$

$d\,f = \frac{2\log(x)}{x}\, d\,x, \quad g = x:$

$$= x\log^2(x) - 2\int \log(x)\, d\,x$$

For the integrand $\log(x)$, integrate by parts,

$\int f\, d\,g = f\, g - \int g\, d\,f$, where

$f = \log(x), \quad d\,g = d\,x,$

$d\,f = \frac{1}{x}\, d\,x, \quad g = x:$

$$= -2\,x\log(x) + x\log^2(x) + 2 \times \int 1\, d\,x$$

The integral of 1 is x:

$$= 2\,x + x\log^2(x) - 2\,x\log(x) + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= x\left(\log^2(x) - 2\log(x) + 2\right) + \text{constant}$$

For the integrand $\log^3(x)$, integrate by parts,
$\int f\,dg = f\,g - \int g\,df$, where
$f = \log^3(x), \quad dg = dx,$
$df = \frac{3\log^2(x)}{x}\,dx, \quad g = x:$

$$= x\log^3(x) - 3\int \log^2(x)\,dx$$

For the integrand $\log^2(x)$, integrate by parts,
$\int f\,dg = f\,g - \int g\,df$, where
$f = \log^2(x), \quad dg = dx,$
$df = \frac{2\log(x)}{x}\,dx, \quad g = x:$

$$= -3x\log^2(x) + x\log^3(x) + 6\int \log(x)\,dx$$

For the integrand $\log(x)$, integrate by parts,
$\int f\,dg = f\,g - \int g\,df$, where
$f = \log(x), \quad dg = dx,$
$df = \frac{1}{x}\,dx, \quad g = x:$

$$= 6x\log(x) - 3x\log^2(x) + x\log^3(x) - 6\times\int 1\,dx$$

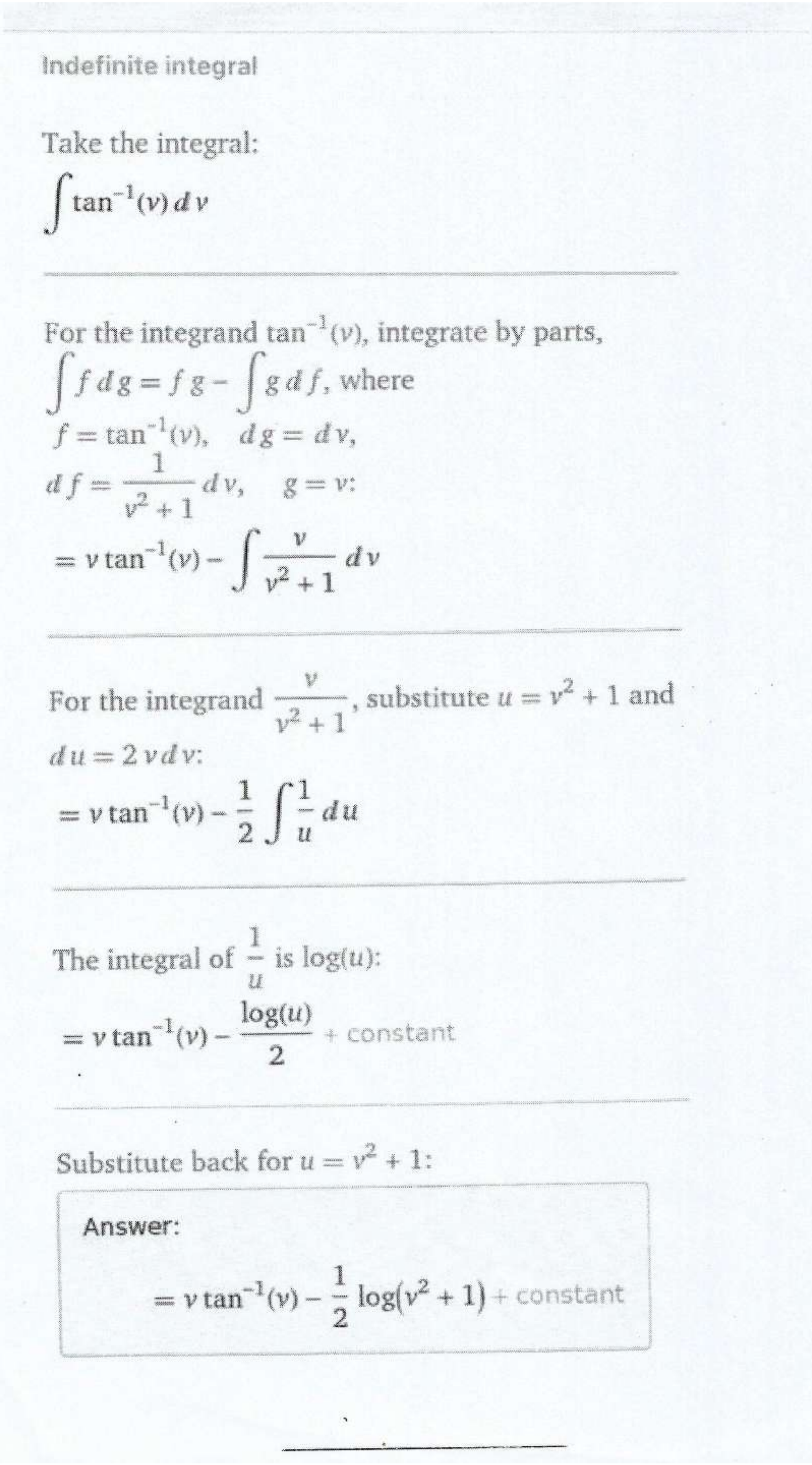
The integral of 1 is x:

$$= -6x + x\log^3(x) - 3x\log^2(x) + 6x\log(x) + \text{constant}$$

Which is equal to:

Answer:

$$= x\left(\log^3(x) - 3\log^2(x) + 6\log(x) - 6\right) + \text{constant}$$



Indefinite integral

Take the integral:

$$\int \tan^{-1}(v)\, d v$$

For the integrand $\tan^{-1}(v)$, integrate by parts, $\int f\, d g = f\, g - \int g\, d f$, where

$f = \tan^{-1}(v), \quad d g = d v,$

$d f = \frac{1}{v^2 + 1} d v, \quad g = v:$

$$= v \tan^{-1}(v) - \int \frac{v}{v^2 + 1} d v$$

For the integrand $\frac{v}{v^2 + 1}$, substitute $u = v^2 + 1$ and $d u = 2\, v\, d v$:

$$= v \tan^{-1}(v) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} d u$$

The integral of $\frac{1}{u}$ is $\log(u)$:

$$= v \tan^{-1}(v) - \frac{\log(u)}{2} + \text{constant}$$

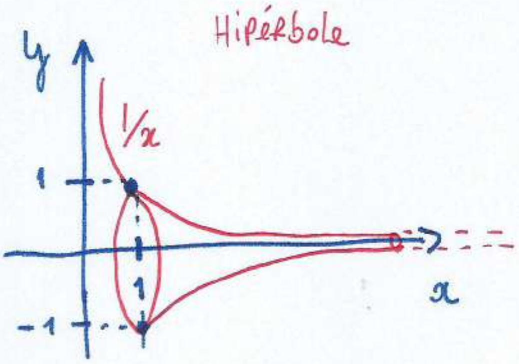
Substitute back for $u = v^2 + 1$:

Answer:

$$= v \tan^{-1}(v) - \frac{1}{2} \log(v^2 + 1) + \text{constant}$$

4 - Trombeta de Gabriel: $f(x) = 1/x = x^{-1}$; p/ $x \geq 1$.

(a) Determine o volume à direita de $x = 1$.



$$V = \pi \int_1^\infty f_{(x)}^2\,dx$$

$$V = \pi \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

$$V = \pi \cdot \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-2}\,dx = \pi \cdot \lim_{a \to \infty} \left[\left(-x^{-1}\right) \Big|_1^a \right]$$

$$V = \pi \lim_{a \to \infty} \left[-a^{-1} - (-1)^{-1} \right] = \pi \lim_{a \to \infty} \left[+1 - \cancelto{0}{\frac{1}{a}} \right]$$

Portanto: $\boxed{V = \pi}$

(b) Determine a área

$f'(x) = -x^{-2}$

$(y')^2 = +x^{-4}$

$$A = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_{-1}^\infty x^{-1}\sqrt{1 + x^{-4}}\,dx$$

O resultado paradoxal, pois a integral imprópria é

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$ por Teorema da comparação $\int_{+1}^\infty \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}_{g(x) \geq 1/x}\,dx = \infty$

Ou seja temos um sólido com volume finito $V = \pi$ e com uma área infinita.

UFSM
Frederico Westphalen

AGR2006 - Matemática Aplicada às Ciências Agrárias
3^a Prova: Integrais.

Problema 1. Determine a primitiva da função $f(x)$:
(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$;
(b) $f(x) = \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^3-6x^2}}$;
(c) $f(x) = sen(x)e^{cos(x)}$.

Problema 2. Resolva as primitivas com o método de substituição de variáveis:
(a) $\int \sqrt{1-x^2}dx;$
$(b)\int (x^3+x+1)\sqrt{2x+5}dx;$
$(c)\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-1}}dx.$

Problema 3. Determine a integral definida:
(a) $\int_{-1}^{5} \frac{2x^4}{3}dx;$
(b) $\int_{-1}^{2} \frac{3x^2}{2}e^{(x^2+1)}dx;$
(c)$\int_4^{25}(x^{3/2}+x^{5/2}-4x^{-7/2})dx.$

Problema 4. Determine a área entre as duas parábolas $f(x) = x^2$ e $g(x) = -2x^2+3$. Esboce o gráfico.

Problema 5. Paraboloide é uma superfície gerada pela rotação de uma parábola em relação ao eixo y. As características geométricas dessa superfície são muito úteis. Sabendo que a área de qualquer superfície de revolução é dada por

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

(a) Qual a medida da superfície gerada pelo arco de $y = x^2$, em torno do eixo y, no intervalo de [0,4]?
(b) Esboce o gráfico.

UFSM
Frederico Westphalen

EXAME
AGR2006 - Matemática Aplicada às Ciências Agrárias

Problema 1. Considere $A = 1cm$;
(a) Esboce o gráfico da função $f(t) = Acos(t)$;
(b) Esboce o gráfico da função $f(t) = Asen(t - \pi/2)$;
(c) Qual é a diferença entre as funções seno e coseno?

Problema 2. Dertermine a derivada da função $f(x)$:
(a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
(b) $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3X^2} + \frac{1}{2\sqrt{X}}$;
(c) $f(x) = ln(2x^2 + 4)$;
(d) $f(x) = e^{-3x^2}$.

Problema 3. Determine os extremos relativos e esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Problema 4. Determine as seguintes integrais:
$(a) \int \frac{1}{(1-x)^2} dx;$
(b) $\int sen(x) e^{cos(x)} dx$;
(c) $\int_5^{-1} \frac{2x^4}{3} dx$;
(d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-1}} dx$

Problema 5. Determine a área entre as duas parábolas $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -2x^2 + 4$. Esboce o gráfico.

Problema 6. Sabendo que a área de qualquer superfície de revolução é dada por

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

e sendo a equação de uma circunferência de raio R com centro na origem dada por: $x^2 + y^2 = R^2$;
(a) Determine a área da esfera de raio R;
(b) Determine o volume da esfera de raio R.