Fenômenos de Transporte

FORMULÁRIO

- Segunda Lei de Newton (Momento Linear e Angular) e Energia total específica:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \quad \Sigma\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}; \quad e = gy + \frac{V^2}{2} + u.$$

- Equação Básica da Formulação de Volume de Controle:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \iint\limits_{S.C.} \beta\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V.C.} \beta\rho\,d\forall.$$

- Vazão e Fluxo Convectivo:

$$Q = \iint\limits_{A} (\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A}; \quad \dot{m} = \iint\limits_{A} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A}.$$

- Teorema da Divergência:

$$\iint\limits_{S} \vec{G}\cdot\hat{n}\,d\vec{A} = \iiint\limits_{V} \vec{\nabla}\cdot\vec{G}\,d\forall = 0.$$

- Equação da Continuidade na Forma Integral e na Forma Diferencial:

$$\iint\limits_{S.C.} \rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V.C.} \rho\,d\forall = 0; \quad \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

- Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

- Equação de Bernoulli (sem dissipação e com dissipação de Energia Mecânica):

$$gy_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = gy_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}; \quad y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p.$$

- Equação de Bernoulli Modificada para situações com Bombas e Turbinas:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_B = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p; \;\; y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} - h_T = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p.$$

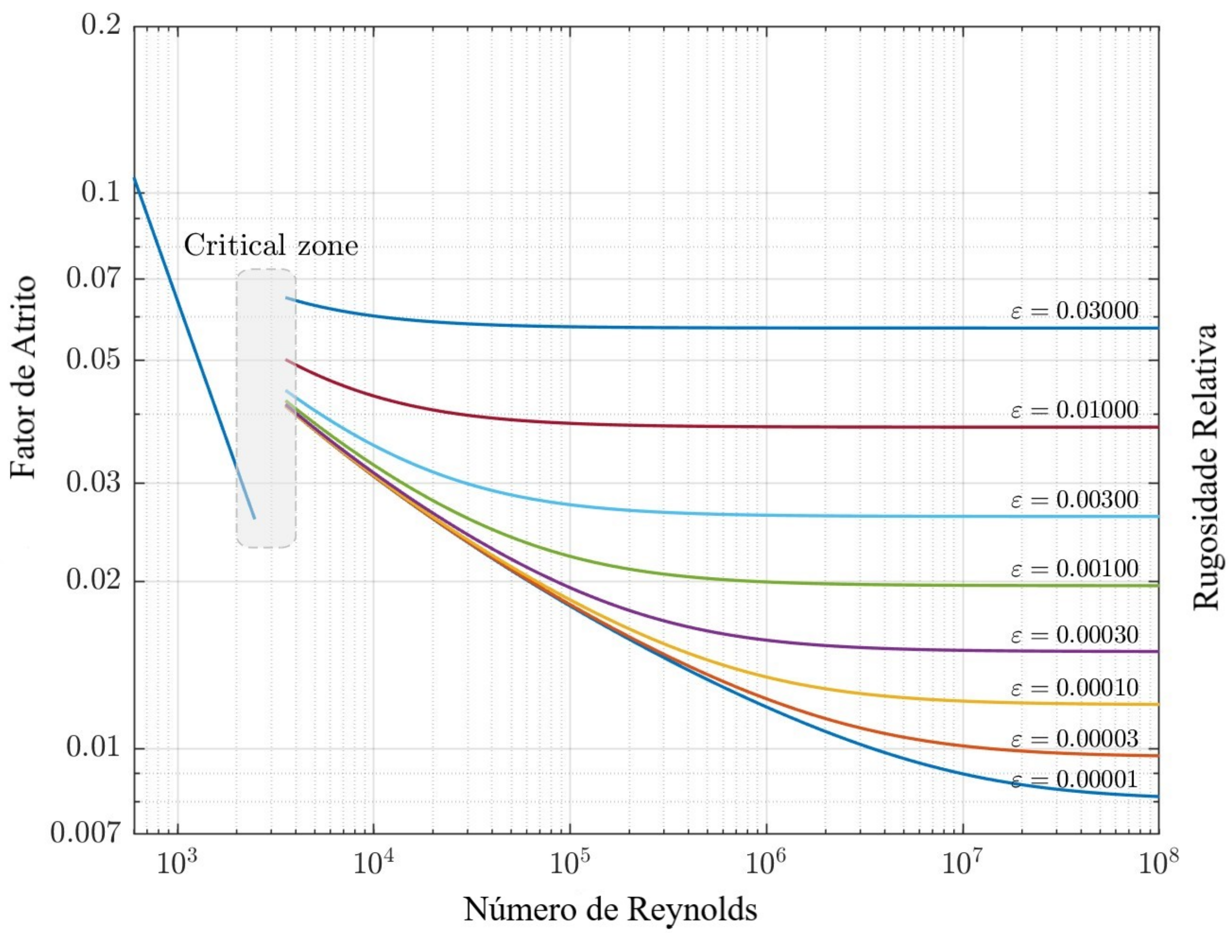
- Potência de Bombas e Turbinas:

$$\frac{\delta W_B}{dt} = \dot{m} g h_B = \rho g Q h_B; \qquad \frac{\delta W_T}{dt} = \dot{m} g h_T = \rho g Q h_T.$$

- Equação de Darcy-Weisbach, Fator de Atrito do Duto e Número de Reynolds:

$$h_{p,d} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g}; \quad f = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right); \quad Re_x = \frac{\rho V_0 x}{\mu}.$$

- Diagrama de Moody para os fatores de atrito de escoamentos em dutos de seção circular:



- Equação de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{V}.$$

- Componentes da Equação de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas:

Componente r:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right];$$

Componente θ:

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right];$$

Componente z:

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right].$$

- Operador derivada material:

$$\frac{D}{Dt} = V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

- Tensor Tensão;

$$\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Tensão Normal; Tensão de Cisalhamento e Viscosidade Absoluta:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p; \quad \tau_{yx} = \mu\frac{d\theta}{dt} = -\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}; \quad \mu = \rho\nu.$$

- Lei de Fourier; Equação de Difusão de Calor e Difusividade Térmica:

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}; \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}.$$

- Equação diferencial de transporte de calor (escoamento incompressível):

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T - k\nabla^2 T = 0.$$

Universidade Federal de Santa Maria
SEDES SAPIENTIÆ
1960
UFSM
Frederico Westphalen

1^a *Lista de Exercícios de Fenômenos de Transporte*
Conceitos e Definições

Prof. Nilson E. Souza Filho

Questão 1. O conceito de *meio contínuo* é um modelo para estudo do comportamento macroscópico da matéria em que se considera uma distribuição contínua de massa.
(a) Qual é o limite de validade do *modelo de meio contínuo* e;
(b) Como podemos representar as propriedades de um fluido neste modelo?
(c) Descreva as propriedades que diferenciam os gases de líquidos.

Questão 2. (a) Defina *fluido newtoniano* ;
(b) Quando ocorre atrito viscoso em um escoamento?

Questão 3. (a) Defina grandezas *extensivas* e grandezas *intensivas*;
(b) Qual é a relação entre essas grandezas nos processos de transferência por difusão?
Represente matematicamente essa relação.
(c) Conceitue campo e gradiente de uma grandeza intensiva.

Questão 4. (a) Explique a diferença básica entre as representações de Lagrange e de Euler;
(b) Descreva a experiência de Reynolds e Conceitue escoamento laminar e escoamento turbulento;
(c) Explique por que as trajetórias, as linhas de emissão e linhas de corrente com origem no mesmo ponto, são coincidentes em um escoamento em regime permanente.

Questão 5. (a) Conceitue volume de controle;
(b) Defina vazão e fluxo de massa de um escoamento;
(c) Conceitue velocidade média de um escoamento.

1^a *Lista de Exercícios de Fenômenos de Transporte*
Escoamentos

Prof. Nilson E. Souza Filho

Problema 1. A figura 1 apresenta um esquema de um escoamento de água entre duas placas planas horizontais de grandes dimensões e separadas por uma distância d pequena. A placa inferior permanece em repouso, enquanto a placa superior está em movimento com velocidade V_x constante, de forma que resulta uma distribuição linear de velocidade de escoamento da água.

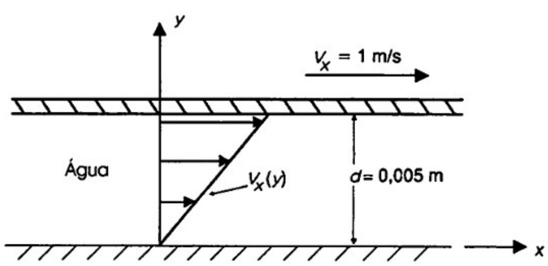


Figura 1: *Escoamento de água.*

Sendo a viscosidade da água $\mu = 0,001 Pa \cdot s$, determine:
(a) O gradiente de velocidade de escoamento;
(b) A tensão de cisalhamento na placa superior;
(c) Determine a viscosidade do óleo colocado no lugar da água, sendo $\tau_{yx} = 40Pa$.

Problema 2. Um cilindro desliza no interior de outro cilindro oco com velocidade de $V_{tg} = 4cm/s$ (constante). Determine a viscosidade do óleo que separa os dois cilindros.

Problema 3. A Figura 2 mostra um esquema de um escoamento laminar, totalmente desenvolvido e em regime permanente, de um fluido newtoniano, entre duas placas paralelas e estacionárias, de grandes dimensões e separadas de uma distância h pequena. A distribuição de velocidade de escoamento é dada por: $V_x(y) = V_{max}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$. Determine a distribuição de tensões cisalhantes no escoamento.

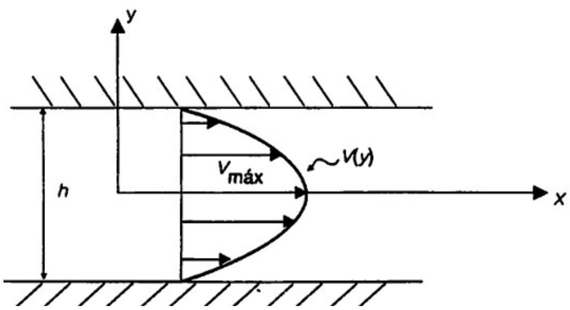


Figura 2: *Escoamento permanente.*

Problema 4. A figura 3 apresenta um esquema de distribuição de velocidade para um escoamento laminar de um fluido newtoniano, totalmente desenvolvido, num duto de seção circular constante, dada por:

$$V_z(r) = V_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Onde V_{max} é a velocidade máxima do perfil (distribuição) ue ocorre no centro da seção, e R é o raio interno do duto. Sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido, determine:
(a) A distribuição de tensões de cisalhamento τrz no escoamento e;
(b) A força por unidade de comprimento que o escoamento exerce na parede do duto.

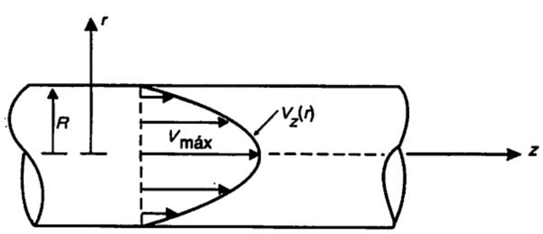


Figura 3: *Distribuição de velocidade para um escoamento laminar.*

Problema 5. Considere o processo unidimensional de transporte difusivo de momento linear em um fluido. Na fase em regime permanente, têm-se as condições invariantes com o tempo, de forma que a placa superior está com velocidade constante $V_x = V_{0x}$, enquanto a placa inferior permanece em repouso. Determine a distribuição de velocidade $Vx(y)$ em regime permanente.

Problema 6. Determine a velocidade média, numa seção, de um escoamento laminar, totalmente desenvolvido e em regime permanente, no duto de seção circular com diâmetro constante, sendo a distribuição de velocidade de para esse tipo de escoamento que é dada no problema 5.

Problema 7. Determine a perda de carga distribuída em um escoamento de água ($\mu = 0,001 Pa \cdot s$ e $\rho = 1000 kg/m^3$) com vazão $Q = 0,082 m^3/s$ num duto, com parede de ferro fundido ($e = 0,0102\ in$), de seção circular com diâmetro $D = 26cm$ e comprimento $L = 100m$. Qual o tipo do escoamento?

Problema 8. Água escoa em regime permanente no duto de seção circular mostrado na Figura 4 com um fluxo de massa $\dot{m} = 50 kg/s$. Sendo $p = 1000 kg/m^3$ a massa específica da água, determine a vazão do escoamento e as velocidades médias nas seções (1) e (2).

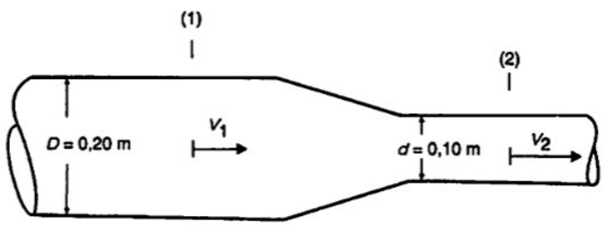


Figura 4: *Escoamento laminar.*

Problema 9. Considere o escoamento permanente de água no sistema de dutos cilíndricos mostrado na Figura 5. Considerando perfis uniformes de velocidade nas seções transversais, determine a velocidade média de escoamento na seção (3).

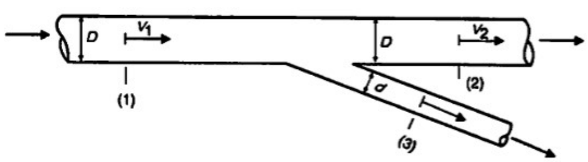


Figura 5: *Escoamento laminar.*

Problema 10. Considere um escoamento permanente de água em um duto horizontalcom seção transversal retangular constante de altura $2h$ e muito largo. Na seção de entrada, o escoamento tem distribuição uniforme de velocidade V_E dada. O duto é suficientemente longo para que na seção de saída o escoamento tenha uma distribuição de velocidade parabólica dada por:

$$V = V_{max}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right].$$

Considerandoa largura unitária da seção transversal retangular do duto, determine avelocidade V_{max}, na seção de saída.

Problema 11. Água escoa, em regime permanente, com vazão $Q = 0,08m^3/s$ no duto redutor de seção circular da Figura 6. Considerando perfis uniformes de velocidade e pressão nas seções transversais, determine a força exercida pelo escoamento sobre esse duto redutor entre as seções (1) e (2).

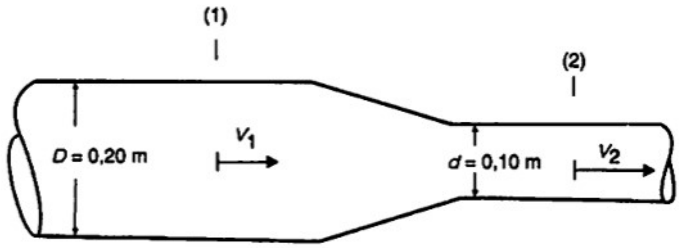


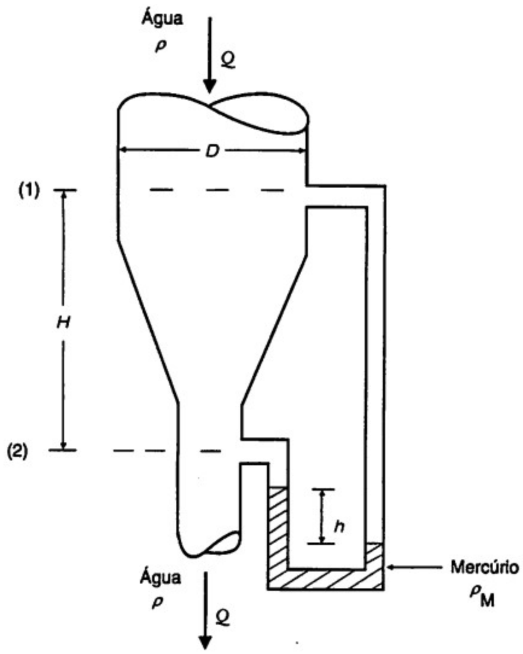
Figura 6: *Escoamento laminar.*

Problema 12. Considere um escoamento permanente, incompressível e laminar, totalmente desenvolvido, de um fluido newtoniano com viscosidade μ, no interior de um duto horizontal de seção circular constante de raio interno R. **Determine:**
(a) A distribuição de velocidade de escoamento numa seção, a partir da *Equação de Navier-Stokes*;
(b) A distribuição de tensões de cisalhamento τ_{rz} no escoamento;
(c) A força por unidade de comprimento que o escoamento exerce sobre a parede do duto; e
(d) A velocidade média do escoamento.

Problema 13. Aplique o princípio da conservação da energia na equação básica da formulação de V.C. para determinar a *equação da energia* e a partir da equação de Bernoulli, mostre que a potência transferida de um escoamento em regime permanente é $\frac{\delta W_T}{dt} = \rho g Q h_T$, em que h_T é a carga fornecida pelo escoamento para a turbina.

Problema 14. A figura abaixo apresenta um esquema de escoamento permanente de água, sem atrito viscoso, com vazão Q e massa específica ρ, em um duto vertical de seção circular. **Determine:**
(a) O diâmetro interno da seção (2), para que as pressões estáticas nas seções (1) e (2) sejam iguais;
(b) A altura manométrica h, para as condições do item (a).

Problema 15. A figura abaixo apresenta um esquema de um fluido newtoniano, com massa específica ρ e viscosidade μ, constantes, entre dois cilindros muito longos, verticais e coaxiais. O cilindro central, com raio R_1, permanece estacionário, enquanto o cilindro externo, de raio interno R_2, possui velocidade angular ω_0 constante, de forma que o escoamento do fluido é laminar e em regime permanente. Determine, a partir da *Equação de Navier-Stokes*, a distribuição de velocidade de escoamento V_θ do fluido entre os cilindros.



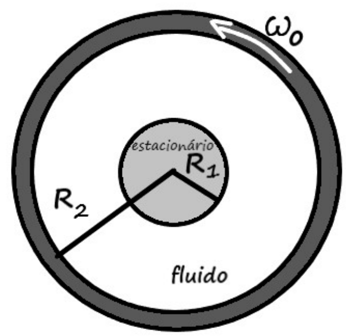
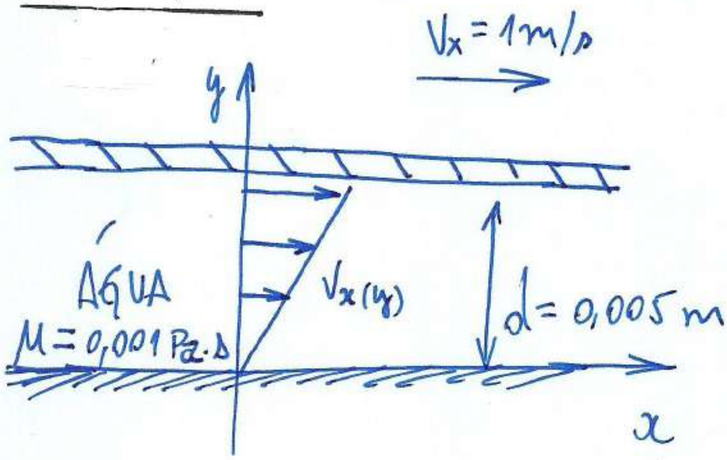


*Figura do **Problema 14** (escoamento em duto vertical);* *Figura do **Problema 15** (viscosímetro de Coutte).*

Problema 1

1.3



$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial V_x}{\partial y}$$ (Tensão de cisalhamento)

(a) Determine o gradiente de escoamento.

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1 \cancel{m}/s}{0,005 \cancel{m}} \therefore \boxed{\frac{\partial V_x}{\partial y} = 200 \ s^{-1}}$$

(b) Determine a tensão de cisalhamento.

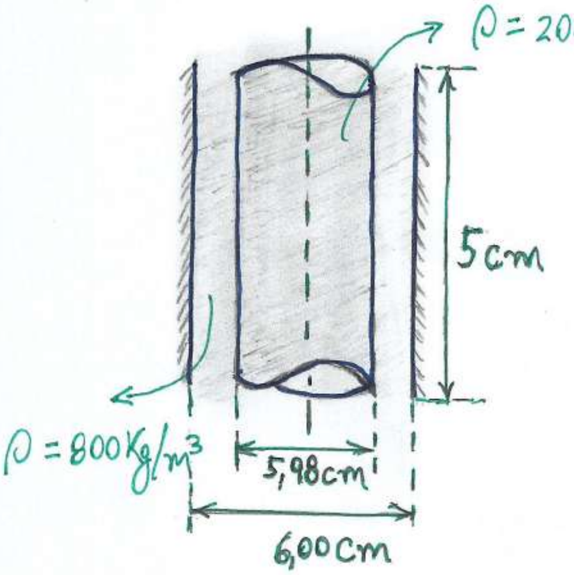
$$\tau_{yx} = -\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0,001 \ Pa \cdot \cancel{s} \cdot \frac{200}{\cancel{s}}$$

$$\boxed{\tau_{yx} = -0,2 \ Pa}$$

(c) Considere óleo no lugar de água, no problema anterior com $\tau_{yx} = 40$ Pa, determine μ.

$$\boxed{\mu = \tau_{yx} \frac{\partial y}{\partial V_x} = \frac{40 \ Pa \cdot 0,005 \cancel{m}}{1 \cancel{m}/s} = 0,2 \ Pa \cdot s}$$

2 - UM CILINDRO DESLIZA NO INTERIOR DE OUTRO CILINDRO OCO COM VELOCIDADE $v_{tg} = 4\ cm/s$ (CONSTANTE). ESTIMAR A VISCOSIDADE DO ÓLEO QUE SEPARA OS DOIS CILINDROS.



$$\nu_{óleo} = \frac{\mu_{óleo}}{\rho_{óleo}} \quad ; \quad \mu_{óleo} = \frac{F_{tg}}{A_{sec}} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v_{tg}}$$

$$\vec{F}_{tg} = \vec{P} = \rho_{cil} \cdot V_{cil} \cdot g$$

$$F_{tg} = 2.000 \left[\frac{\pi \cdot (0{,}0598)^2}{4} \cdot 0{,}05 \right] \cdot 9{,}81$$

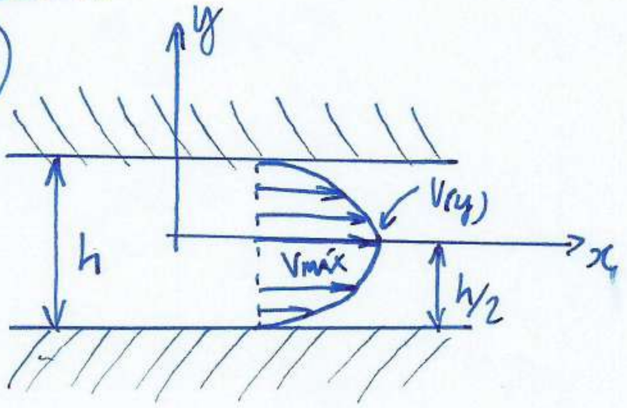
$$F_{tg} \simeq 2{,}76\ N$$

$$\mu_{óleo} = \frac{2{,}76}{0{,}0598 \cdot \pi \cdot 0{,}05} \cdot \frac{1 \times 10^{-4}}{0{,}04} \simeq 7{,}35 \times 10^{-1}\ Pa \cdot s.$$

$$\nu_{óleo} = \frac{7{,}35 \times 10^{-1}}{800}$$, PORTANTO: $$\boxed{\nu_{óleo} \simeq 9{,}2 \times 10^{-4}\ m^2/s}$$

Problema 03

1.6



$$V_x(y) = V_{máx} - \frac{4y^2 V_{máx}}{h^2}$$

Determine τ_{yx}.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{+\mu \cdot 8 y V_{máx}}{h^2} \quad ; \quad y = h/2$$

$$\boxed{\tau_{yx} = \frac{+4\mu \cdot V_{máx}}{h}}$$

1.7 Módulo de Elasticidade da Água $E = 2{,}22 \times 10^9$ Pa.

Determine a variação de pressão necessária para reduzir o volume da água em 0,1%.

Sendo $E = -\dfrac{dp}{\left(\frac{d\forall}{\forall}\right)} \Rightarrow dp = E\left(-\dfrac{d\forall}{\forall}\right)$

$$dp = -2{,}22 \times 10^9 \left(\frac{-0{,}1}{100}\right)$$

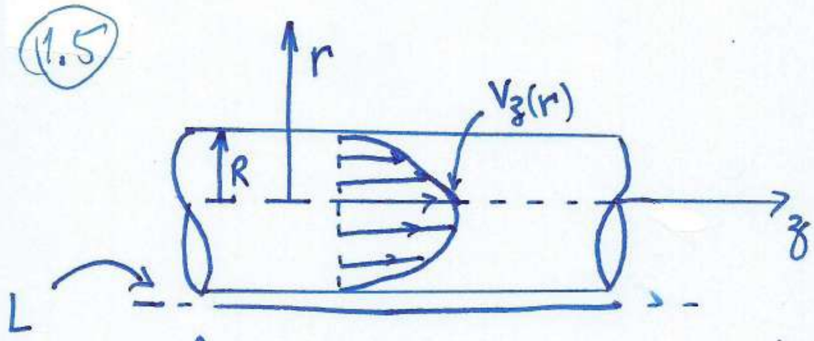
Ver exemplo 1.1

$$\boxed{dp = -2{,}22 \times 10^6 \text{ Pa}}$$

$dp < 0$ pq. reduziu o vol!

Problema 4

(1.5)



$$V_z(r) = V_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$V_z(r) = V_{max} - \frac{V_{máx}}{R^2}\cdot r^2$$

fig. 1.8 - Esquema da distribuição de velocidade para um escoamento laminar de um fluido (Newtoniano)

(a) Determine $\tau_{rz} = -\mu\frac{\partial V_z}{\partial r} = \mu\left[+2V_{máx}\frac{r}{R^2}\right]$

$$\boxed{\tau_{rz} = +\frac{2\mu V_{máx}\cdot r}{R^2}}$$

(b) Determine a força por unidade de comprimento que o escoamento exerce sobre a parede do duto.

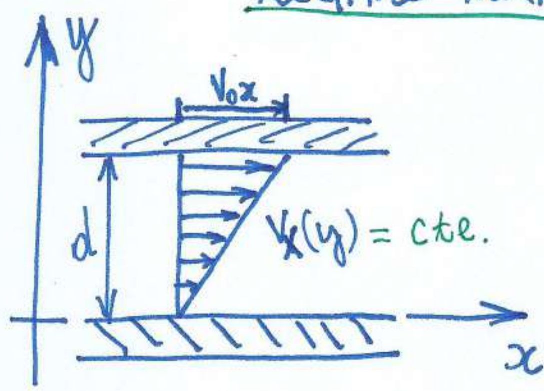
$$\tau_{rz} = \frac{F}{A} = \frac{F}{2\pi R L}$$

$$\left(+\frac{2\mu V_{máx}\cdot \cancel{R}}{\cancel{R^2}}\right) = \frac{F}{L}\cdot\left(\frac{1}{2\pi \cancel{R}}\right)$$

Portanto: $\boxed{\frac{F}{L} = +4\pi\mu V_{máx}.}$

Problema 5

ou (2.7) Determine a distribuição de velocidade $V_x(y)$ em regime permanente. Considere a fig. 2.1 e a eq. (2.8.8)



$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial t} \quad p/ \begin{cases} 0 \leq y \leq d \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$t \gg 0$, regime permanente, $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$

$$C.C. \begin{cases} p/ \ y = 0 \implies V_x(0,t) = 0 \\ p/ \ y = d \implies V_x(d,t) = V_{0x} \end{cases}$$

A Sol. Geral p/ a eq. dif. $\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = 0$ é dada por:
(distribuição de velocidade)

$$V_x(y) = ay + b \quad ; \quad V_x(0) = a \cdot 0 + b = 0$$

$$V_x(d) = V_{0x} = ad$$

Portanto $a = \frac{V_{0x}}{d}$

$$V_x(y) = \left(\frac{V_{0x}}{d}\right) y + 0$$

Então,

$$\boxed{V_x(y) = \left(\frac{V_{0x}}{d}\right) y}$$

PROBLEMA 6

09/10/2023
SEGUNDA.

Exemplo 5.1 - ESCOAMENTO LAMINAR, totalmente desenvolvido e em regime permanente, no duto de seção circular com diâmetro constante.

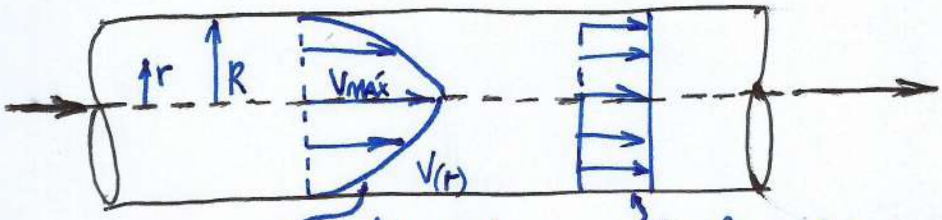


Fig. 5.3 - Esquema de escoamento laminar num duto de seção circular.

Distribuição de veloc. dada por:

$$V_{(r)} = V_{MÁX}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Determine a veloc. média p/ esse escoamento

$$V_{MÉDIA} = \frac{1}{A}\cdot\underbrace{\iint}_{\text{ÁREA DA SEÇÃO}} V_{(r)}\,dA = \frac{1}{\pi R^2}\cdot\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R V_{MÁX}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\,dr\right\}d\theta$$

$$V_{MÉDIA} = \frac{V_{MÁX}}{\pi R^2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_0^R d\theta$$

$$V_{MÉDIA} = \frac{V_{MÁX}}{\pi R^2}\cdot\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V_{MÉDIA} = \frac{V_{MÁX}}{\cancel{\pi R^2}}\cdot\left(\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{4}}\right)\cdot 2\cancel{\pi}$$

$$\boxed{V_{MÉDIA} = \frac{V_{MÁX}}{2}}$$

DEPENDE DA GEOMETRIA DA SEÇÃO!!

O perfil real de velocidade (perfil parabólico) → escoamento laminar. Tem velocidade uniforme igual à metade da velocidade máx. que ocorre no centro da seção transversal no interior do duto.

Problema 07 - Perda de carga distribuída em um escoamento de água.

$\mu = 0{,}001\ Pa \cdot s$

$\rho = 1000\ Kg/m^3$

$Q = 0{,}082\ m^3/s$

Duto com parede de ferro fundido

com $D = 26\ cm$ (cilíndrico) $\longrightarrow D = 260\ mm$

$\ell = 100\ m$; $e = 0{,}0102\ in \longrightarrow e = 0{,}26\ mm$

$\epsilon = \dfrac{e}{D}$

1º) Determinar a velocidade média do escoamento usando a vazão: $Q = V_M \dfrac{\pi D^2}{4}$

$$V_M = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}082}{3{,}14\,(260 \times 10^{-3})^2} = \frac{0{,}328 \times 10^{6}}{212.264} = \frac{328 \times 10^3}{212.264}$$

$$\boxed{V_M = 1{,}5452\ m/s}$$

2º) O número de Reynolds desse escoamento é dado por:

$$R_e = \frac{\rho V_M D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 1{,}54 \cdot 260 \times 10^{-3}}{0{,}001} = (1000 \cdot 0{,}26 \cdot 1{,}54) \times 10^3$$

$$\boxed{Re \simeq 4{,}004 \times 10^5}$$

3º) Sendo $\epsilon = \dfrac{e}{D} = \dfrac{0{,}26}{260} = 0{,}001$, a rugosidade relativa,

podemos obter o fator de atrito com o diagrama de Moody: $f \simeq 0{,}02$

Assim, a perda de carga distribuída $h_{p,d}$, é determinada por meio da eq. de Darcy-Weisbach:

$$h_{p,d} = f \frac{\ell}{D} \frac{V_M^2}{2g} = 0{,}02 \cdot \frac{100}{0{,}26} \cdot \frac{(1{,}54)^2}{2 \cdot 9{,}8} = 7{,}69 \cdot \frac{(2{,}37)}{19{,}60}$$

$$\boxed{h_{p,d} \simeq 0{,}93\ m}$$

Lista de Exercícios do Cap. 5.

FW, 08/11/2023

5.4 - Eq. (4.3.7) $\rightarrow V_{(r)} = V_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$

$D = 0{,}10 \times 10^{-2}\, m$

$V_{máx} = 0{,}2\, m/s$

$V_m = ?$ e $Q = ?$

$A = \pi R^2$

Do Exemplo 5.1, vimos que:

$$V_m = \frac{V_{máx}}{2} = \boxed{0{,}1\, m/s}$$

Sendo $Q = V_m A = V_m \pi R^2$

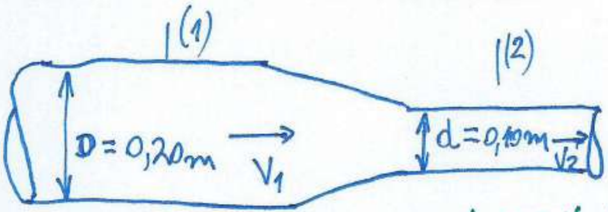
$$Q = 0{,}1 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}05 \times 10^{-2})^2$$

$$Q = 0{,}314 \cdot (0{,}0025 \times 10^{-4})$$

$$\boxed{Q \simeq 0{,}0008\, m^3/s}$$

Problema 8

5.5 Regime permanente



$A_1 = 3{,}14 \cdot (0{,}10)^2 = 0{,}0314\, m^2$

$A_2 = 3{,}14 \cdot (0{,}05)^2$

$A_2 = 0{,}00785\, m^2$

$\dot{m} = 50\, Kg/s$

$\rho = 1000\, Kg/m^3$

$Q = ?$ e $V_{m(1)}$ e $V_{m(2)} = ?$

$$\dot{m} = \iint_A \rho \left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right) d\vec{A}$$

$\dot{m} = \rho V_m \cdot A$; $Q = V_m \cdot A$

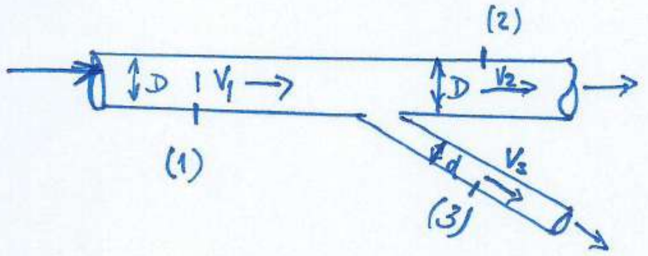
$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{50}{1000} = \boxed{0{,}05\, m^3/s}$$

$V_{m(1)} = \frac{Q}{A_1}$ e $V_{m(2)} = \frac{Q}{A_2}$

$V_{m(1)} \simeq 1{,}6\, m/s$ e $V_{m(2)} = 6{,}37\, m/s$

Problema 9

(5.6) - Escoamento Permanente (Dutos cilíndricos).



Determine a velocidade média de escoamento na seção (3).

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{A}$$

$$V_1 = \frac{Q}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} = V_2$$

$$V_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{Q}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Observe que: $Q_3 = Q_1 - Q_2$

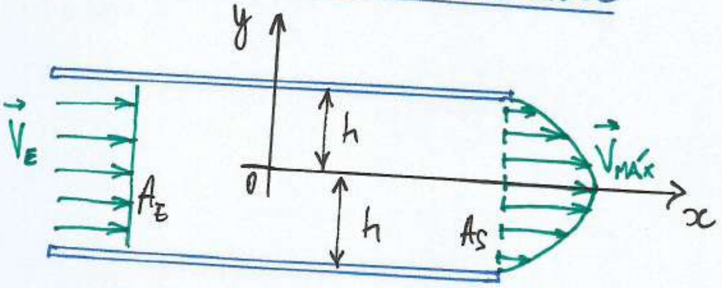
$$V_3 \cdot \frac{Q}{\pi \frac{d^2}{\cancel{4}}} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{\cancel{4}}} V_1 - \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{\cancel{4}}} \cdot V_2$$

$$V_3 = \frac{\cancel{\pi} d^2}{\cancel{Q}}\left(\frac{\cancel{Q} V_1}{\cancel{\pi} D^2} - \frac{\cancel{Q} V_2}{\cancel{\pi} D^2}\right)$$

$$\boxed{V_3 = \frac{d^2}{D^2} \cdot (V_1 - V_2)}$$

Problema 10

(5.8) Escoamento Permanente



$$V = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \; ; \; V^S_{máx} = ?$$

$$Q_{entrada} = Q_{saída}$$

$$V_E \cdot A_E = V^S_m \cdot A_S \; ; \text{ sendo } A_E = A_S$$

$$\boxed{V_E = \bar{V}}$$

$$A = 2h \cdot \ell$$

($\ell \rightarrow$ muito longo)

$$V_m^{saída} = \frac{1}{A} \iint_A V_{(r)}\, dA = \overline{V_s}$$

$$\overline{V_s} = \frac{1}{A} V_{máx} \int_0^{\ell}\int_{-h}^{h} \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{V_{máx}}{2h\ell}\left[\int_0^{\ell}\int_{-h}^{h} dx\, dy - \int_0^{\ell} dx \int_{-h}^{h} \frac{1}{h^2} \cdot y^2 dy\right]$$

$$\overline{V_s} = \frac{V_{máx}}{2h\ell} \cdot \left[\ell \cdot 2h - \frac{\ell}{h^2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-h}^{h}\right] = \frac{V_{máx}}{2h\ell}\left\{2h\ell - \frac{\ell}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{3}\left(h^3 + h^3\right)\right]\right\}$$

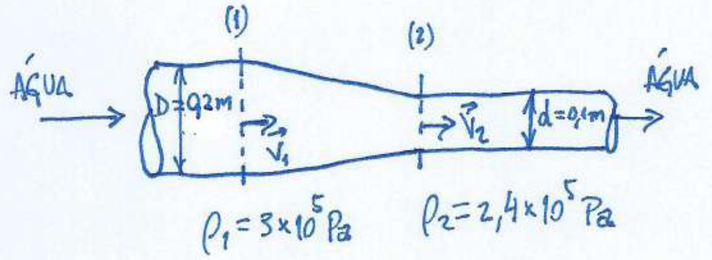
$$\overline{V_s} = \frac{V_{máx}}{\cancel{2h\ell}}\left[\cancel{2h\ell} - \frac{\cancel{2h\ell}}{3}\right] \Longrightarrow \boxed{V_{máx} = \frac{3}{2}\overline{V_s} = \frac{3}{2} V_E}$$

PROBLEMA 11

(5.9) Regime Permanente

COM VAZÃO $Q = 0{,}08\, m^3/s$. Determine:

A força exercida pelo escoamento sobre esse duto redutor entre as seções (1) e (2).



$$\begin{cases} p_1 = 3\times10^5\, Pa \\ p_2 = 2{,}4\times10^5\, Pa \end{cases}$$

$$F_E = [p_1 A_1 - p_2 A_2] + m(V_1 - V_2)$$

$A_1 = \pi R^2$ $\qquad$ $A_2 = \pi r^2$

$A_1 = 3{,}14 \cdot (0{,}1)^2$ $\qquad$ $A_2 = 3{,}14 \cdot (0{,}05)^2$

$A_1 = 0{,}0314\, m^2$ $\qquad$ $A_2 = 0{,}00785\, m^2$

$V_1 = \dfrac{Q}{A_1} = \dfrac{0{,}08}{0{,}0314} = 2{,}55\, m/s$; $\qquad V_2 = \dfrac{Q}{A_2} = \dfrac{0{,}08}{0{,}00785} = 10{,}13\, m/s$.

$m = \rho V A = 1000 \cdot 2{,}55 \cdot 0{,}0314$

$m = 80{,}07\, Kg/s$.

$$F_E = [p_1 A_1 - p_2 A_2] + m(V_1 - V_2)$$

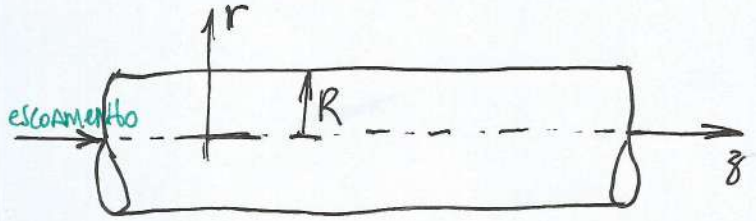
$$F_E = [3\times10^5 \cdot 0{,}0314 - 2{,}4\times10^5 \cdot 0{,}00785] + 80{,}7(2{,}55 - 10{,}19)$$

$$F_E = [9.420 - 1884] + (-611{,}73)$$

$$\boxed{F_E = 6.924{,}27\, N}$$

Problema 12 (Exemplo 6.2)

Determine a distribuição (perfil) de velocidade de escoamento numa seção, a partir da eq. de Navier-Stokes, considerando um gradiente de pressão $\vec{\nabla} p_z = cte.$ ao longo do escoamento.



* escoamento permanente $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$;
* escoamento incompressível $\Rightarrow \rho = cte$;
* escoamento horizontal $\Rightarrow g_z = 0$;

* Escoamento unidirecional em z, laminar e totalmente desenvolvido.

$$\Longrightarrow \quad V_r = 0; \quad V_\theta = 0; \qquad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = 0.$$

De forma que utilizaremos a componente z da eq. de Navier Stokes:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right) = \rho g_z \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \mu\left[\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}}^{0}\right]$$

A velocidade de escoamento V_z é função somente da coordenada radial r, a componente z da eq. de Navier-Stokes se reduz a uma eq. dif. ordinária

$$\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_z}{dr}\right)\right] = \left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

$$\int \partial\left(r\frac{dV_z(r)}{dr}\right) = \frac{dp}{dz}\int\left(\frac{r}{\mu}\right)dr$$

$$\int dV_z(r) = \frac{dp}{dz}\int\frac{r^2}{2\mu r} + \int\frac{C_1}{r}$$

$$\boxed{V_z(r) = \frac{dp}{dz}\cdot\frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2}$$

Sendo a solução geral: $V_z(r) = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2$

As constantes de integração C_1 e C_2 são determinadas aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} p/\ r = 0 \Rightarrow V_z(0) \text{ é finita;} \\ p/\ r = R \Rightarrow V_z(R) = 0. \end{cases}$$

Para satisfazer a 1ª c.c. $\Rightarrow$ $C_1 = 0$; logo

Para a 2ª c.c., teremos $V_z(R) = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dz} r^2 + C_2 = 0$

$$\therefore \quad C_2 = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot R^2$$

Ao substituir os valores de C_1 e C_2 na sol. geral, obtemos:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - R^2) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Verifica-se, experimentalmente, que a velocidade de escoamento é máxima no centro do duto, ou seja, p/ $r = 0 \Rightarrow V_z(0) = V_{máx} \equiv C_2$.

Portanto: $\boxed{V_z(r) = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$

Problema 13 - Equação básica da formulação de volume de controle:

$$\frac{dB_{sist.}}{dt} = \iint_{S.C.} \beta\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} \beta\rho d\forall \quad (01)$$

Sendo a energia total do sistema, a grandeza extensiva $\longrightarrow B = E$

e a energia total específica (por unidade de massa) a grandeza intensiva $\longrightarrow \beta = e$.

$$\frac{dE_{sist}}{dt} = \iint_{S.C.} e\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} e\rho d\forall \quad (02)$$

Da conservação da energia, ou da 1ª lei da termodinâmica: $\frac{dE_{sist.}}{dt} = \left(\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt}\right)$

e sendo $e = gy + \frac{V^2}{2} + u$, teremos:

$$\left(\frac{\delta Q}{dt} - \boxed{\frac{\delta W}{dt}}\right) = \iint_{S.C.} e\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} e\rho d\forall \quad (03)$$

Potência *
(Taxa de realização de trabalho)

$$\frac{\delta W}{dt} = \frac{\delta W_{eixo}}{dt} + \frac{\delta W_{escoamento}}{dt} + \frac{\delta W_{cisalhamento}}{dt} \quad (04)$$

"Potência de escoamento:

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{\delta W}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V} \quad (05)$$

A taxa de trabalho realizado pelo fluido sobre a vizinhança, pelas tensões normais σ_{ii} em um elemento de área $d\vec{A}$ da S.C. é dado por:

$$\frac{\delta W_f}{dt} = -\vec{F}\cdot\vec{V} = -\sigma_{ii}\, d\vec{A}\cdot\vec{V} \quad (06)$$

Sendo $\sigma_{ii} = -p$,

temos que: $$\frac{\delta W_{escoamento}}{dt} = -\iint_{S.C.} \sigma_{nn}\, d\vec{A}\cdot\vec{V} = +\iint_{S.C.} p\,(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} \qquad (07)$$

* Portanto, $$\frac{\delta W}{dt} = \frac{\delta W_{eixo}}{dt} + \iint_{S.C.} p(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} + \frac{\delta W_{\mu}}{dt} \qquad \text{(DA eq. 04)}$$

Ao substituir na 1ª lei da termodinâmica na formulação de Vol. de controle; (eq. 03), fica:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_{eixo}}{dt} - \iint_{S.C.} p\,(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} = \iint_{S.C.} e\,\rho\,(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} e\,\rho\,d\forall$$

$$\boxed{\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_{eixo}}{dt} = \iint_{S.C.} \left(e + p/\rho\right)\rho\,(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} e\,\rho\,d\forall}$$

(EQUAÇÃO DA ENERGIA)

Em que consideramos os efeitos de aumento de energia interna do fluido e do fluxo de calor para a vizinhança, causadas pelo atrito viscoso no volume de controle, por isso o termo $\left(\frac{\delta W_{\mu}}{dt}\right)$ não foi explicitado na equação da energia!

Lembrando que: $e = gy + \frac{V^2}{2} + u$ (energia específica);

e que: $\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$ (fluxo de massa).

A partir da equação de Bernoulli modificada para situações com turbinas:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_T + h_p$$

$$\Longrightarrow \quad h_T = \left[\left(y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right)\right] - h_p$$

Sendo: $\frac{\delta W_{eixo}}{dt} = \frac{\delta W_T}{dt} > 0$ (Potência da Turbina)

Ao substituir na equação da energia, temos

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_T}{dt} = \iint_{S.C.} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} e\rho\, d\forall}^{\,0}$$

Regime permanente!

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_T}{dt} = \iint_{(1)}^{(2)} \left(gy + \frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,d\vec{A}$$

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_T}{dt} = \left[\left(gy + \frac{V^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right)\cancel{\rho V A}^{\,\dot{m}}\right]\Bigg|_1^2$$

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_T}{dt} = \left[\left(gy_2 + \frac{V_2^2}{2} + u_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) - \left(gy_1 + \frac{V_1^2}{2} + u_1 + \frac{p_1}{\rho}\right)\right]\dot{m}$$

$$-\frac{\delta W_T}{dt} = \left[\left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right) - \left(y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}\right)\right]\dot{m}g + \frac{(u_2 - u_1)}{g}\dot{m}g - \frac{\delta Q}{dt}$$

$$-\frac{\delta W_T}{dt} = \left[\left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right) - \left(y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho}\right)\right]\dot{m}g + \underbrace{\frac{1}{g}\left[(u_2 - u_1) - \frac{\frac{\delta Q}{dt}}{\left(\frac{dm}{dt}\right)}\right]}_{\to\, h_p}\dot{m}g$$

Perdas de carga atrito viscoso! $\to h_p$

$$\frac{\delta W_T}{dt} = \left[\left(y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}\right) - h_p\right]\dot{m}g$$

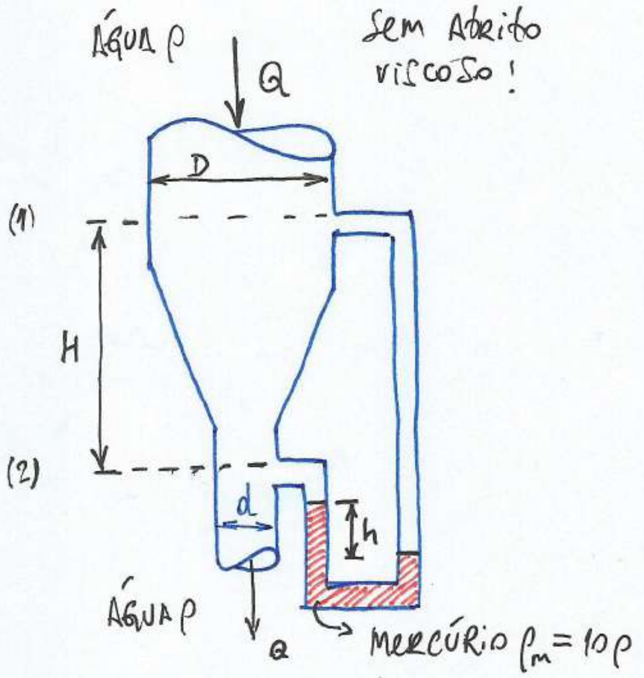
$\dot{m}g \to$ fluxo de peso do escoamento.

Portanto: $$\boxed{\frac{\delta W_T}{dt} = \dot{m}gh_T = \rho g Q h_T}$$

$\frac{\delta W_T}{dt}$: Potência transferida do escoamento p/ a turbina.

h_T: Carga fornecida pelo escoamento p/ a turbina.

PROBLEMA 14 - ESCOAMENTO PERMANENTE DE ÁGUA.



(a) Determine o diâmetro interno da seção (2) p/ que as pressões estáticas nas seções (1) e (2) sejam iguais.

A partir da eq. de Bernoulli com perda de carga entre as seções (1) e (2), temos;

Sendo: $V_1 = \dfrac{4Q}{\pi D^2}$ e $V_2 = \dfrac{4Q}{\pi d^2}$;

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p$$

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} = \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2g} + \cancel{(y_2 - y_1)} \xrightarrow{} 0 \text{ se } y_1 = y_2$$

$$(p_1 - p_2) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{16Q^2}{\pi^2 d^4} - \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}\right) = \frac{8Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)\rho$$

DA leitura do Manômetro: $p_1 + \rho g h - \rho_m g h = p_2$

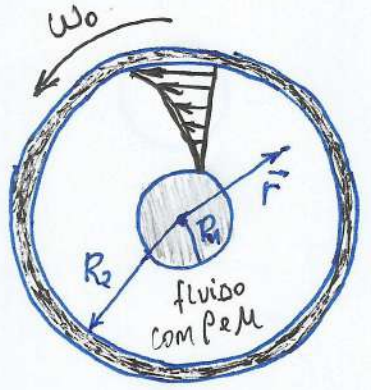
Portanto: Idem (b) $\longrightarrow$ $(p_1 - p_2) = hg(\rho_m - \rho) = Hg\rho$

$$\cancel{\rho} Hg\pi^2 = 8Q^2\cancel{\rho}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right) = \frac{8Q^2}{d^4} - \frac{8Q^2}{D^2} \quad \therefore \quad \boxed{h = \left(\frac{\rho}{\rho_m - \rho}\right)H}$$

$$Hg\pi^2 + \frac{8Q^2}{D^4} = \frac{8Q^2}{d^4} \Rightarrow \frac{(8Q^2 + Hg\pi^2 D^4)}{D^4} = \frac{8Q^2}{d^4}$$

$$\boxed{d = \left(\frac{8Q^2 D^4}{\pi^2 g H D^4 + 8Q^2}\right)^{1/4}}$$

Problema 15 - Viscosímetro de Coutte. Determine a distribuição de velocidade de escoamento V_θ do fluido entre os cilindros (a partir da eq. de mov. de Navier-Stokes)



O fluido se move em trajetória circular,

Portanto: $\begin{cases} V_\theta = V_\theta(r); \quad V_r = 0 \quad e \quad V_z = 0 \\ p = p(r,z); \quad g_r = g_\theta = 0 \quad e \quad g_z = g \end{cases}$

As componentes da eq. de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, são simplificadas, e necessitamos somente da componente θ.

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta)\right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_0) = C_1$$

$$\int \partial(rV_\theta) = \int C_1 \cdot r\, dr$$

$$rV_\theta = \frac{C_1 r^2}{2} + C_2 \Rightarrow \boxed{V_\theta(r) = \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r}}$$

As condições de contorno são as de que o fluido não desliza sobre as duas superfícies cilíndricas: $k = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$\begin{cases} \text{C.C. 1} \rightarrow \text{em } r = r\cdot\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow V_\theta(kr) = 0 \\ \text{C.C. 2} \rightarrow \text{em } r = R \Rightarrow V_\theta(R) = \omega_0 R \end{cases}$$

As condições de contorno podem ser utilizadas para obter as constantes de integração C_1 e C_2.

$$V_\theta(r) = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}$$

C.C. 1 $\longrightarrow$ $V_\theta(KR) = 0 \Longrightarrow \frac{C_1 KR}{2} = -\frac{C_2}{KR} \therefore C_2 = -\frac{C_1}{2}(KR)^2$

C.C. 2 $\longrightarrow$ $V_\theta(R) = \omega_0 R \Longrightarrow \frac{C_1 R}{2} - \left(\frac{C_1}{2}\right)\frac{(KR)^2}{R} = \omega_0 R$

$$\frac{C_1 \cancel{R}}{2} - \frac{C_1 R^{\cancel{2}}}{2\cancel{R}} K^2 = \omega_0 \cancel{R}$$

$$C_1(1-K^2) = 2\omega_0 \quad \therefore \quad C_1 = \frac{2\omega_0}{(1-K^2)} \Longrightarrow C_2 = \frac{-\omega_0}{(1-K^2)}(KR)^2$$

Portanto: $V_\theta(r) = \frac{\cancel{2}\omega_0 r}{\cancel{2}(1-K^2)} - \frac{\omega_0}{(1-K^2)} \cdot \frac{(KR)^2}{r}$

$$\boxed{V_\theta(r) = \frac{\omega_{outer}}{(1-K^2)}\left[r - \frac{(KR)^2}{r}\right] = \omega_0 R \frac{\left(\frac{r}{KR} - \frac{KR}{r}\right)}{\left(\frac{1}{K} - K\right)}}$$

Fluxo do momento $\Longrightarrow$ $\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = -2\mu\omega_0\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{K^2}{1-K^2}\right)$

O que aconteceria se mantivéssimos o cilindro externo fixo e girássemos o cilindro interno com uma velocidade angular ω_{inner}?

Teríamos: $V_\theta(r) = \omega_{inner} KR \cdot \frac{\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)}{\left(\frac{1}{K} - K\right)}$